



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA

Facoltà di Scienze Matematiche,
Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Fisica

ANNO ACCADEMICO 1999–2000

Esplorazione di insiemi di istantoni in QCD

Valerio Cappellini

Tesi di Laurea

RELATORE: Chiar.mo Prof. Adriano Di Giacomo (Università di Pisa)

Indice

Indice Generale	i
Elenco delle figure	iii
Elenco delle tabelle	v
1 Teoria di gauge $SU(3)$ su reticolo	1
1.1 Cenni di Cromodinamica Quantistica	1
1.1.1 Origini e formulazione	1
1.1.2 Il riferimento Euclideo	3
1.1.3 Teoria perturbativa standard	5
1.1.4 Regolarizzazione e rinormalizzazione	5
1.1.5 Libertà asintotica	9
1.2 QCD su reticolo	10
1.2.1 Definizioni ed invarianza di gauge	10
1.2.2 Il metodo Monte–Carlo Dinamico	13
1.2.3 Catene di Markov	14
1.2.4 L’algoritmo Metropolis	16
1.2.5 Il limite continuo	17
2 Istantoni in QCD	19
2.1 Soluzioni classiche ad azione finita	19
2.1.1 Topologia e vuoti classici	19
2.1.2 L’istantone di Belavin–Polyakov–Schwartz–Tyupkin	21
2.1.3 Variabili collettive di una pseudoparticella in $SU(N)$	24
2.2 Densità delle pseudoparticelle in $SU(N)$	26
2.2.1 Problema unidimensionale di potenziale	26
2.2.2 Effetto tunnel in doppia buca di potenziale	32
2.2.3 Descrizione del calcolo in $SU(N)$	37
2.2.4 Validità della $d(\rho)$	41

3	Studio del modello di Diakonov	45
3.1	Insiemi di pseudoparticelle	45
3.1.1	Il liquido di istantoni	45
3.1.2	L'insieme di Diakonov	48
3.1.3	L'algoritmo di Cabibbo–Marinari	52
3.1.4	Distribuzione delle matrici di $SU(3)$	53
3.1.5	Primi tests all'insieme di Diakonov	59
3.2	Misure sull'insieme di Diakonov	63
3.2.1	Costruzione del reticolo	63
3.2.2	Il parametro $SU(2)$ – $SU(3)$	66
3.2.3	I cammini reticolari analizzati	69
3.2.4	I nostri risultati	74
A	Il simbolo η di 't Hooft	81
B	Le funzioni $D(x)$ e $d(x)$ di Diakonov	85
	Conclusioni	91
	Bibliografia	93

Elenco delle figure

2.1	Scomposizione a blocchi di una matrice dell'algebra di $SU(N)$.	26
2.2	Potenziale dell'oscillatore armonico: $V(x) = \omega^2 x^2 / 2$	31
2.3	Potenziale della doppia buca: $V(x) = \lambda(x^2 - \eta^2)^2$	32
2.4	Grafico di un istantone	33
2.5	Transizione $ - \eta \rangle \longrightarrow \eta \rangle$ ad opera di tre p.p.	36
3.1	Area accessibile alla traccia di una matrice $SU(3)$ su $\mathbb{C}$	54
3.2	Test all'algoritmo di Cabibbo–Marinari	56
3.3	Grafico della distribuzione della traccia di matrici $SU(3)$ su $\mathbb{C}$.	59
3.4	Mappatura del dominio di $\Xi(\phi_1, \phi_2)$ e diagramma di densità . .	67
3.5	Costruzione del parametro Ξ	68
3.6	Istogramma di frequenza di Ξ su un insieme di 10^8 matrici $SU(3)$	69
3.7	Esempio di trasporto parallelo tra 2 plaquettes poste a distanza d	70
3.8	Rappresentazione grafica dei sei tipi di $M_{\mu\nu;\rho\sigma}^\tau(\hat{n}, d)$	71
3.9	Istantone singolo	75
3.10	Coppia I–AI con media sull'orientazione relativa	77
3.11	Coppia I–AI con media sulla linea per i centri	78
3.12	Influenza delle fluttuazioni sulle $\Xi(d)$	79
3.13	Medie delle Ξ calcolate su 12 diverse configurazioni di Diakonov	80
B.1	Rappresentazione grafica delle $D(x)$ e $d(x)$ di Diakonov.	86

Elenco delle tabelle

3.1	Risultati del test fatto all'algoritmo di Cabibbo–Marinari	57
3.2	Misure di $\langle G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a \rangle$ e $\langle Q \rangle$ sull'insieme di Diakonov (1)	61
3.3	Misure di $\langle G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a \rangle$ e $\langle Q \rangle$ sull'insieme di Diakonov (2)	61
3.4	Misure di $\langle G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a \rangle$ e $\langle Q \rangle$ sull'insieme di Diakonov (3)	61
3.5	Misure di $\langle G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a \rangle$ e $\langle Q \rangle$ sull'insieme di Diakonov (4)	61
3.6	Misure di $\langle G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a \rangle$ e $\langle Q \rangle$ sull'insieme di Diakonov (5)	62
3.7	Misure di $\langle G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a \rangle$ e $\langle Q \rangle$ sull'insieme di Diakonov (6)	62
B.1	Parametri e grandezze statistiche nella $d(x)$ di Diakonov	89

Capitolo 1

Teoria di gauge SU(3) su reticolo

1.1 Cenni di Cromodinamica Quantistica

1.1.1 Origini e formulazione

La Cromodinamica Quantistica (o QCD) è considerata a tutt'oggi, dopo trent'anni dalla sua prima formulazione [1, 2], la teoria fondamentale delle interazioni forti. Il punto di partenza fu il modello a quarks liberi di Gell-Mann [3] la cui lagrangiana si scrive

$$\mathcal{L}(x) = \sum_{f=1}^{N_f} \bar{\psi}_f(x) \left(i\partial_\mu \gamma_\mu - m_f \right) \psi_f(x). \quad (1.1)$$

dove N_f e m_f (f da *flavours*) indicano rispettivamente il numero di specie diverse di quarks presenti nel modello e le loro masse. Il modello non conteneva interazione ma era proposto come il modello più semplice che possedesse le simmetrie degli adroni. L'esistenza di barioni quali Δ^{++} , Δ^- e Ω^- (rispettivamente (uuu) , (ddd) e (sss)) sembrava violare il principio di Pauli [4]. Tali barioni sono infatti costituiti da tre quarks con lo stesso flavour e spin ; $| J = \frac{3}{2}; J_z = \frac{3}{2} \rangle$ implica che tutti gli spin siano allineati sempre che il momento orbitale totale sia zero, ipotesi quest'ultima ritenuta ragionevole per uno stato fondamentale, anche perché l'ipotesi $L = 0$ aveva portato buoni risultati nel calcolo dei momenti magnetici barionici. Questo rendeva impossibile la realizzazione di uno stato antisimmetrico come richiesto dal principio di Pauli.

Una possibile via d'uscita era ipotizzare che questi barioni costituissero ognuno un tripletto antisimmetrico rispetto ad un nuovo numero quantico conservato detto *di colore* [5, 6]; ad esempio $|\Delta^{++}; J_z = \frac{3}{2}\rangle = \varepsilon_{ijk} |u^i \uparrow; u^j \uparrow; u^k \uparrow\rangle$. Successivamente questa simmetria fu trasformata in una simmetria di gauge basata sul gruppo di colore $SU(3)$, del quale i quarks sono la rappresentazione fondamentale. La procedura è quella di sostituire alla derivata nella (1.1) una “derivata covariante”

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - ig_0 A_\mu^a T^a \quad g_0 \quad \text{costante di accoppiamento bare} \quad (1.2)$$

dove $\{T^a\}$ sono i generatori del gruppo nella rappresentazione fondamentale

$$\text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab} \quad \text{condizione di normalizzazione} \quad (1.3)$$

$$[T^a, T^b] = if^{abc} T^c \quad f^{abc} \quad \text{costanti di struttura del gruppo} \quad (1.4)$$

Usando la notazione matriciale per i campi di gauge ($A_\mu = A_\mu^a T^a$) possiamo ora scrivere le leggi di trasformazione [7]

$$\begin{aligned} \psi_f(x) &\longrightarrow \Omega(x) \psi_f(x). & \Omega(x) &= e^{-i\theta^a(x) T^a} & (1.5) \\ \left((D_\mu \psi_f)(x) \right) &\longrightarrow \Omega(x) (D_\mu \psi_f)(x). \\ \overline{(\psi_f)}(x) &\longrightarrow \overline{\psi_f}(x) \Omega^\dagger(x). \\ \left(\overline{D_\mu \psi_f}(x) \right) &\longrightarrow \overline{(D_\mu \psi_f)}(x) \Omega^\dagger(x). \end{aligned}$$

$$A_\mu(x) \longrightarrow \Omega(x) A_\mu(x) \Omega^\dagger(x) - \frac{i}{g_0} \left(\partial_\mu \Omega(x) \right) \Omega^\dagger(x). \quad (1.6)$$

sotto le quali la lagrangiana è invariante. L'introduzione dei campi di gauge comporta l'inserimento di un loro termine cinetico che rispetti le invarianze di Lorentz e di gauge. A tale scopo introduciamo il tensore covariante:

$$G_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{g_0} [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig_0 [A_\mu, A_\nu] \quad (1.7)$$

ossia, in componenti, $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_0 f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$.

La Lagrangiana totale della QCD viene pertanto ad essere:

$$\mathcal{L}_{QCD}(x) = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a(x) G^{\mu\nu a}(x) + \sum_{f=1}^{N_f} \bar{\psi}_f(x) \left(i D_\mu \gamma^\mu - m_f \right) \psi_f(x). \quad (1.8)$$

È interessante notare come la costante di accoppiamento possa essere fattorizzata fuori dalla lagrangiana (e quindi dall'azione) mediante un banale riscaloring dei campi di gauge, previa una ridefinizione di D_μ e $G_{\mu\nu}$.

$$\begin{aligned} \text{Cioè} \quad \mathcal{L} &\longrightarrow \frac{\mathcal{L}}{g_0^2} & \text{per} \quad A_\mu &\longrightarrow \frac{A_\mu}{g_0} ; \quad \psi_f \longrightarrow \frac{\psi_f}{g_0} ; \quad \bar{\psi}_f \longrightarrow \frac{\bar{\psi}_f}{g_0} \\ \text{e} \quad D_\mu &\equiv \partial_\mu - iA_\mu^a T^a & \text{e} \quad G_{\mu\nu}^a &\equiv \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \end{aligned} \quad (1.9)$$

La teoria può essere costruita mediante l'integrale funzionale di Feynman [8]. Secondo tale formulazione il valore di aspettazione sul vuoto di un qualunque operatore di campo $O[A_\mu, \bar{\psi}, \psi]$ (d'ora in poi $VEV = \text{Vacuum Expectation Value}$) si esprime come:

$$\langle 0|O[A_\mu, \bar{\psi}, \psi]|0\rangle = \frac{1}{Z} \int [dA d\bar{\psi} d\psi] O[A_\mu, \bar{\psi}, \psi] \exp(iS[A_\mu, \bar{\psi}, \psi]) \quad (1.10)$$

dove $S[A_\mu, \bar{\psi}, \psi]$ è l'azione

$$S[A_\mu, \bar{\psi}, \psi] = \int d^4x \mathcal{L}_{QCD}(x) \quad (1.11)$$

e

$$Z = \int [dA d\bar{\psi} d\psi] \exp(iS[A_\mu, \bar{\psi}, \psi]) \quad (1.12)$$

dove $\mathcal{L}_{QCD}$ è quella introdotta in (1.8)

1.1.2 Il riferimento Euclideo

Le (1.10 – 1.12) mostrano un'evidente analogia formale con la meccanica statistica, a meno della “ i ” di fronte all'azione che pesa configurazioni diverse non già con un esponenziale (reale) ma con un fattore oscillante.

L'analogia diventa completa se si complessifica il tempo ($t \rightarrow T = -it$).

Ponendo l'indice “4” alla coordinata temporale nel nuovo riferimento, che denomineremo *spazio euclideo*¹:

$$x_i^M = x_i^E \quad x_0^M = -ix_4^E \quad (1.13)$$

$$(\partial_i^M = -\partial_i^E \quad \partial_0^M = i\partial_4^E)^2 \quad (1.14)$$

¹In questa sottosezione l'indice “ M ” starà ad indicare lo spazio di Minkowsky mentre alle grandezze nello spazio euclideo sarà apposto l'indice “ E ”

Le proprietà di trasformazione dei campi di gauge sono uguali a quelle della derivata (1.14), di conseguenza la forma della derivata covariante si ritrova pressoché inalterata nella (1.17)

$$A_i^M = -A_i^E \quad A_0^M = iA_4^E \quad (1.15)$$

$$D_i^M = -D_i^E \quad D_0^M = iD_4^E \quad (1.16)$$

$$\left\{ D_\alpha^E \equiv \partial_\alpha^E - ig_0 A_\alpha^{Ea} T^a \right\}_{\alpha=1\dots 4} \quad (1.17)$$

Per il tensore $G_{\mu\nu}$, coerentemente con la definizione (1.7), si ha

$$G_{ij}^M = G_{ij}^E \quad G_{0j}^M = -iG_{4j}^E \quad (1.18)$$

Ora, poiché il gruppo di Lorentz è rimpiazzato nello spazio euclideo dal gruppo 4-dimensionale delle rotazioni ($O(4) = SU(2) \times SU(2)$), è conveniente definire un nuovo insieme di matrici γ ($\{\gamma_\mu^E\}_{\mu=1,\dots,4}$), che soddisfino l'algebra di Clifford $\{\gamma_\mu^E, \gamma_\nu^E\} = 2\delta_{\mu\nu}$ [9].

Una scelta (ermitiana) possibile è:

$$\gamma_i^E = -i\gamma_i^M \quad \gamma_4^E = \gamma_0^M \quad (1.19)$$

Con le proprietà:

$$\gamma_\alpha^{E\dagger} = \gamma_\alpha^E \quad (\gamma_\alpha^E)^2 = 1 \quad \gamma_\alpha^E \gamma_\alpha^E = 4 \quad (1.20)$$

Per i campi di materia, invece, si ha

$$\psi^E = \psi^M \quad \bar{\psi}^E = i\bar{\psi}^M \quad (1.21)$$

L'azione euclidea diventa perciò

$$S^E[A_\mu^E, \bar{\psi}^E, \psi^E] = -iS^M[A_\mu^M(A_\mu^E), \bar{\psi}^M(\bar{\psi}^E), \psi^M(\psi^E)] = \int d^4x^E \mathcal{L}_{QCD}^E(x^E) \quad (1.22)$$

$$\mathcal{L}_{QCD}^E(x^E) = \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^{Ea}(x^E) G_{\mu\nu}^{Ea}(x^E) - i \sum_{f=1}^{N_f} \bar{\psi}_f^E(x^E) \left(D_\mu^E \gamma_\mu^E + m_f \right) \psi_f^E(x^E). \quad (1.23)$$

²In questo modo $\partial_\alpha^E x_\alpha^E = \partial_0^E x_0^E + \partial_i^E x_i^E = \partial_0^M x_0^M - \partial_i^M x_i^M = \partial_\mu^M x^{\mu M}$.

La funzione di partizione ed il VEV sul vuoto di un generico operatore di campo nella formulazione euclidea saranno:

$$Z^E = \int [dA d\bar{\psi} d\psi] \exp(-S^E[A_\mu, \bar{\psi}, \psi]) . \quad (1.24)$$

$$\langle 0 | O^E[A_\mu, \bar{\psi}, \psi] | 0 \rangle = \frac{1}{Z^E} \int [dA d\bar{\psi} d\psi] O^E[A_\mu, \bar{\psi}, \psi] \exp(-S^E[A_\mu, \bar{\psi}, \psi]) \quad (1.25)$$

La teoria Euclidea è totalmente equivalente a quella Minkowskiana ; sono legate da continuazione analitica.

D'ora in poi, salvo diversamente specificato, ci riferiremo sempre al sistema euclideo; per questo motivo ometteremo dal resto della trattazione l'indice “ E ”.

1.1.3 Teoria perturbativa standard

La valutazione di funzione di partizione e VEV di operatori può essere ben complicata, per essere risolta mediante un trattamento analitico esatto. Altro caso si ha quando l'azione si può esprimere come forma quadratica, nel qual caso gli integrali divengono gaussiani multidimensionali e quindi calcolabili analiticamente.

Possiamo pertanto dividere l'azione in una parte quadratica (che denomineremo S_0) ed una residua (che indicheremo con S_I , dove la “ I ” stà per *interazione*). Fattorizzando poi l'esponenziale in prodotto di due ed espandendo quello di interazione in serie otterremo:

$$Z = \int d[\phi] e^{-(S_0[\phi] + S_I[\phi])} = \int d[\phi] e^{-S_0[\phi]} \left(1 - S_I[\phi] + \frac{1}{2!} S_I^2[\phi] + \dots \right) \quad (1.26)$$

Abbiamo indicato con $[\phi]$ tutto l'insieme dei campi dai quali l'azione dipende. La usuale teoria perturbativa consiste nel troncare la serie tra parentesi ad un certo ordine.

A questo punto le grandezze da calcolare saranno VEV di polinomi di campi nella teoria libera.

1.1.4 Regolarizzazione e rinormalizzazione

Come è noto la QCD è caratterizzata da integrali divergenti negli sviluppi perturbativi. Il processo mediante il quale è possibile “rimuovere” tali divergenze è chiamato *rinormalizzazione*.

Di fatto queste quantità divergenti vengono isolate mediante *regolarizzazione*

dalle parti regolari (ossia non divergenti) nelle funzioni di interesse. Al fine di poter controllare una divergenza i vari metodi di regolarizzazione introducono uno o più parametri che hanno la funzione di rendere finite le parti divergenti; le divergenze riappaiono al tendere di tali parametri a valori limite. Un metodo semplice può essere quello di mettere un cut off ultravioletto (Λ) agli integrali nello spazio dei momenti: l'integrale manifesta la sua divergenza quando il cut off viene rimosso, ossia quando $\Lambda \rightarrow \infty$.

È altresì possibile ricorrere ad altri metodi di regolarizzazione, ad es.:

- Regolarizzazione analitica, che complessifica esponenti negli integrali;
- Il reticolo stesso, del quale ci occuperemo più diffusamente in seguito, discretizzando lo spazio tempo impone un cut off nello spazio degli impulsi;
- Regolarizzazione dimensionale, che rende finiti gli integrali diminuendo le dimensioni spazio-temporali di una quantità ε .

Nel seguito di questo paragrafo illustreremo la rinormalizzazione servendoci del metodo di regolarizzazione dimensionale.

Il fatto che l'azione debba essere adimensionale implica un cambiamento nelle dimensioni dei campi e della costante di accoppiamento quando si cambiano di ε le dimensioni dello spazio-tempo. Questo porta alla comparsa di una nuova scala di massa μ .

Aver convertito gli integrali divergenti in termini finiti ci permette ora di passare al processo di rinormalizzazione, mediante il quale andremo a sottrarre le parti che, nel limite $\varepsilon \rightarrow 0$, sono singolari. Questo ci pone un problema: Esiste una ambiguità nella procedura di sottrazione, dovuta alla presenza di logaritmi della forma $\ln\left(\frac{p^2}{\mu^2}\right)$ dove p è la scala del problema, che si riflette sulla scelta della scala μ .

Tipicamente, nel linguaggio della regolarizzazione dimensionale, si presentano poli del tipo $\frac{1}{\varepsilon}$ (con $\frac{1}{\varepsilon} \propto \ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right)$). Possiamo:

- Togliere il polo (**Schema MS** o **Minimal Subtraction Scheme**)
- Il residuo al polo $\frac{1}{\varepsilon}$ può essere ambiguo per termini $\propto \varepsilon$ che forniscono parti finite. Tipico è il termine ricorrente $\ln(4\pi) - \gamma_E$ (dove quest'ultima è la costante di Eulero, cfr. (2.52)). Possiamo allora decidere di togliere $\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi)$: questo schema è denominato **Modified Minimal Subtraction** o **Schema $\overline{\text{MS}}$** e sarà quello al quale ci riferiremo di seguito.

Abbiamo dunque nella Lagrangiana l'espressione originale più un certo numero di nuovi pezzi (*controtermini*) che abbiamo aggiunto per eliminare le parti divergenti nei diagrammi.

Tutti i termini (quelli vecchi più i controtermini aggiunti) possono poi essere *riscritti* in nuovi parametri (essenzialmente masse, costante di accoppiamento e campi riscaldati mediante opportuni fattori Z di rinormalizzazione) in modo da avere una lagrangiana equivalente in forma a quella di partenza.

Avremo ora delle funzioni che legano i parametri *bare* della teoria ai parametri *fisici* (quelli misurabili sperimentalmente), nonché alla scala di energia (μ) introdotta nella rinormalizzazione ed al cutoff.

Certo è che grandezze non rinormalizzate (funzioni di Green, funzioni di vertice etc.) non possono dipendere dal parametro di scala μ introdotto.

Prendiamo ad esempio una funzione di vertice a n particelle $\Gamma^{(n)}$: avremo $\mu \frac{d\Gamma^{(n)}}{d\mu} = 0$. Se ora esprimiamo $\Gamma^{(n)}$ in funzione dei parametri rinormalizzati, a loro volta funzioni di μ , sarà possibile espandere l'operatore differenziale $\mu \frac{d}{d\mu}$ nelle derivate parziali di grandezze rinormalizzate ottenendo [10]:

$$\Gamma^{(n)}(p_i, g, m) = Z_\phi^{-\frac{n}{2}}(g\mu^\epsilon)\Gamma_r^{(n)}(p_i, g_r, m_r, \mu) \quad (1.27)$$

$$\left[-n\mu \frac{\partial}{\partial\mu} \ln \sqrt{Z_\phi} + \mu \frac{\partial}{\partial\mu} + \mu \frac{\partial g_r}{\partial\mu} \frac{\partial}{\partial g_r} + \mu \frac{\partial m_r}{\partial\mu} \frac{\partial}{\partial m_r} \right] \Gamma_r^{(n)}(p_i, g_r, m_r, \mu) = 0 \quad (1.28)$$

dove: p_i sono gli impulsi
 Z_ϕ è un fattore di normalizzazione
 r è l'indice delle grandezze rinormalizzate (indice che d'ora in poi ometteremo per brevità)

Definendo $\gamma(g) = \mu \frac{\partial}{\partial\mu} \ln \sqrt{Z_\phi}$
 $\beta(g) = \mu \frac{\partial g}{\partial\mu}$
 $m\gamma_m(g) = \mu \frac{\partial m}{\partial\mu}$ l'equazione (1.28) diviene:

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial\mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - n\gamma(g) + m\gamma_m(g) \frac{\partial}{\partial m} \right] \Gamma_r^{(n)}(p_i, g_r, m_r, \mu) = 0 \quad (1.29)$$

Questa è chiamata equazione del gruppo di rinormalizzazione (o equazione RG) ed esprime l'invarianza della grandezza $\Gamma_r^{(n)}$ sotto cambiamento del parametro di regolarizzazione μ .

Un'altra invarianza che possiamo sfruttare è quella di $\Gamma_r^{(n)}$ sotto cambiamento di scala ($p \rightarrow tp$, $\mu \rightarrow t\mu$, $m \rightarrow tm$), che in formule si traduce in:

$$\Gamma^{(n)}(tp_i, g, m, \mu) = t^D \Gamma^{(n)}(p_i, g, t^{-1}m, t^{-1}\mu) \quad (1.30)$$

dove: t è un fattore moltiplicativo
e D è la dimensione in massa di $\Gamma^{(n)}$

Applicando l'operatore $t \frac{d}{dt}$ ad ambo i membri della (1.30) otteniamo:

$$\left[t \frac{\partial}{\partial t} + m \frac{\partial}{\partial m} + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} - D \right] \Gamma^{(n)}(tp_i, g, m, \mu) = 0 \quad (1.31)$$

che, per confronto con la (1.29), ci permette di eliminare il termine $\mu \frac{d}{d\mu}$ ottenendo:

$$\left[-t \frac{\partial}{\partial t} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - n\gamma(g) + m \left(\gamma_m(g) - 1 \right) \frac{\partial}{\partial m} + D \right] \Gamma^{(n)}(tp_i, g, m, \mu) = 0 \quad (1.32)$$

Questa equazione esprime, in forma differenziale, come un cambiamento in t venga compensato da un cambiamento in m e g (più eventualmente un fattore moltiplicativo in fronte a $\Gamma^{(n)}$). Ossia ci aspettiamo delle funzioni $f(t)$, $g(t)$ ed $m(t)$ tali che:

$$\Gamma^{(n)}(tp_i, g, m, \mu) = f(t) \Gamma^{(n)}(p_i, g(t), m(t), \mu) \quad (1.33)$$

Applicando ancora una volta l'operatore $t \frac{d}{dt}$, con opportune sostituzioni arriviamo a:

$$\left[-t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{t}{f} \frac{df}{dt} + t \frac{\partial m}{\partial t} \frac{\partial}{\partial m} + t \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial}{\partial g} \right] \Gamma^{(n)}(tp_i, g, m, \mu) = 0 \quad (1.34)$$

Confrontando ora i coefficienti in fronte alle derivate in (1.32) e (1.34) perveniamo a:

$$t \frac{\partial g}{\partial t} = \beta(g) \quad (1.35)$$

$$t \frac{\partial m}{\partial t} = m[\gamma_m(g) - 1] \quad (1.36)$$

$$\frac{t}{f} \frac{df}{dt} = D - n\gamma(g) \quad (1.37)$$

In particolare la (1.37) può essere integrata, ottenendo:

$$\Gamma^{(n)}(tp_i, g, m, \mu) = t^D \exp \int_1^t \frac{\gamma(g(t)) dt}{t} \quad (1.38)$$

1.1.5 Libertà asintotica

Se noi definiamo $t \equiv e^\lambda$,

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda} = \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \lambda} = \frac{\partial g}{\partial t} e^\lambda = \frac{\partial g}{\partial t} t = \beta(g) . \quad (1.39)$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla (1.35). Indicheremo con g il valore $g(t = 1)$ cioè $g(\lambda = 0)$.

Mediante la teoria perturbativa siamo in grado di esprimere la $\beta(g)$ della QCD intorno a $g = 0$, che vedremo essere un *punto fisso*.

In particolare, effettuando calcoli all'ordine un loop, l'espressione della $\beta(g)$ (detta funzione di Callan–Symanzik) risulta essere [11, 12] e [4]:

$$\beta(g) = -\beta_0 g^3 + \mathcal{O}(g^5) \quad (1.40)$$

$$\text{con} \quad \beta_0 = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{11}{3} N_{\text{colours}} - \frac{2}{3} N_{\text{flavours}} \right) \quad (1.41)$$

è evidente che, per $N_{\text{flavours}} < 16$ ($N_{\text{colours}} = 3$), $\beta_0 > 0$.

Dunque dalla (1.39),

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda} = -\beta_0 g^3 . \quad (1.42)$$

In un intorno positivo di $g = 0$, all'aumentare di λ (quindi ad alta scala di energia, quindi a piccole distanze) g diminuisce ancora di più, ossia converge verso lo zero. Questo è molto confortante poiché il risultato (1.42) è stato ottenuto tramite sviluppo perturbativo, valido in regime di piccoli g : il fatto che sotto l'equazione (1.42) g vada a diminuire ancora di più ci garantisce il rimanere nel regime di validità dello sviluppo.

Il fenomeno di convergenza a zero della costante di accoppiamento ad alte energie è denominato *libertà asintotica* [11, 13, 14, 15].

Dall'equazione (1.42) segue che

$$\lambda = \int_g^{g(\lambda)} \frac{dg}{\beta(g)} = - \int_g^{g(\lambda)} \frac{dg}{\beta_0 g^3} = \frac{1}{2\beta_0} \left(\frac{1}{g^2(\lambda)} - \frac{1}{g^2} \right)$$

da cui:

$$g^2(\lambda) = \frac{g^2}{1 + 2\beta_0 g^2 \lambda} \quad (1.43)$$

Se fissiamo ora la scala dei momenti in unità di μ , definendo

$$t = e^\lambda = \frac{\sqrt{-q^2}}{\mu}$$

dove q è l'impulso al quale stiamo lavorando, è possibile riscrivere la (1.43) come

$$\alpha(q) \equiv \frac{g^2(q)}{4\pi} = \frac{1}{8\pi\beta_0 \ln\left(\frac{|q|}{\Lambda_{\overline{\text{MS}}}}\right)} \quad (1.44)$$

$$\text{dove } \Lambda_{\overline{\text{MS}}} = \mu \exp\left[-\frac{1}{2\beta_0 g^2}\right]$$

L'unico parametro libero rimane ora essere $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}$, (parametro di scala della QCD nello schema $\overline{\text{MS}}$) che viene fissato dal confronto con i dati sperimentali. Il suo valore risulta essere

$$\Lambda_{\overline{\text{MS}}} = (100 \text{ MeV}) \cdot 2^{\pm 1} \quad (1.45)$$

Nel caso $|q| \gg \Lambda_{\overline{\text{MS}}}$ possiamo pertanto studiare la QCD servendoci degli sviluppi perturbativi (in pratica per $|q| > 1 \text{ GeV}$). Se invece $|q| \approx \Lambda_{\overline{\text{MS}}}$, la costante di accoppiamento diventa grande e rende non più valida la teoria perturbativa standard.

Si parla in questo caso di *regime non perturbativo*.

1.2 QCD su reticolo

1.2.1 Definizioni ed invarianza di gauge

Come abbiamo visto nella sezione precedente il calcolo perturbativo ci consente un trattamento della QCD solo in una regione limitata, più precisamente la regione caratterizzata da alti impulsi trasferiti.

Uno strumento di studio della teoria dai principi primi è fornito dalla formulazione su reticolo; la limitazione di questo approccio è che i risultati sono ottenuti con metodi numerici.

Rifacendosi alla formulazione del path integral [8] il reticolo introduce la discretizzazione dello spazio-tempo [16, 17]. Così come in un cristallo le coordinate (quadridimensionali euclidee) verranno ad essere multiple di un grandezza fondamentale “ a ” che denomineremo *lattice spacing*

$$x^\mu = (x^1, x^2, x^3, x^4) = a n^\mu = a(n^1, n^2, n^3, n^4) \quad , \quad n^\mu \in \mathbb{N}$$

Se guardiamo il tutto in trasformata di Fourier risulta evidente l'aver introdotto un cut off naturale nella teoria: avendo limitato la nostra descrizione nelle

coordinate al di sopra della scala “ a ”, abbiamo escluso gli impulsi più grandi di $\frac{\pi}{a}$, con il risultato di non avere più divergenze ultraviolette.

Per formulare la teoria in maniera gauge invariante si usa come elemento fondamentale il trasporto parallelo.

Consideriamo l’elemento del gruppo $SU(3)$ definito da ³:

$$U(x, y) \equiv P \exp \left(i g_0 \int_x^y A_\mu(z) dz_\mu \right) \quad (1.46)$$

dove l’integrale è calcolato lungo un cammino che connette x a y , $A_\mu = T^a A_\mu^a$ e $P \exp$ sta per esponenziale path ordinato ⁴.

Sotto trasformazione di gauge:

$$U(x, y) \longrightarrow \Omega(y) U(x, y) \Omega^\dagger(x) \quad (1.47)$$

Definiamo la variabile *link* (elemento del gruppo di gauge in esame) su due punti del reticolo adiacenti (d’ora in poi ribattezzati *siti reticolari* o *siti*) come il trasporto parallelo tra di loro

$$U_\mu(n) \equiv U(n, n + \hat{\mu}) = e^{i g_0 a A_\mu(n)} \quad (1.48)$$

dove $\hat{\mu} = \hat{e}_\mu$ indica il versore in direzione μ -esima e l’integrale della (1.46) è stato approssimato con $a A_\mu$.

Se i siti reticolari erano dei punti, i links sono delle freccette orientate di lunghezza “ a ” e direzione “ μ ”.

La (1.46) può ora essere considerata, nel limite continuo, un prodotto di links, con questi ultimi che trasformano come:

$$U_\mu(n) = U(n, n + \hat{\mu}) \longrightarrow \Omega(n + \hat{\mu}) U_\mu(n) \Omega^\dagger(n) \quad (1.49)$$

$$U_\mu^\dagger(n) = U(n + \hat{\mu}, n) \longrightarrow \Omega(n) U_\mu^\dagger(n) \Omega^\dagger(n + \hat{\mu}) \quad (1.50)$$

Prendendo quattro links come contorni ordinati di un quadratino di lato “ a ” sul piano (μ, ν) definiremo la quantità

$$\Pi_{\mu\nu}(n) \equiv U_\nu^\dagger(n) U_\mu^\dagger(n + \hat{\nu}) U_\nu(n + \hat{\mu}) U_\mu(n) \quad (1.51)$$

³Scriveremo in questa sottosezione g_0 per indicare la costante d’accoppiamento.

Gli aspetti legati alla rinormalizzazione sul reticolo saranno affrontati nella successiva (1.2.5).

⁴Per conformità con la notazione usata nell’esprimere le trasformazioni di gauge (1.5 – 1.6) il path ordinamento sarà inteso da destra verso sinistra

⁵Una dimostrazione si trova in [7]: si parte dalla (1.6) scritta nella forma infinitesima

$$A_\mu(z) \longrightarrow A_\mu(z) + i[A_\mu(z), \theta(z)] - \frac{1}{g_0} \partial_\mu \theta(z)$$

che denomineremo *plaquette*.

Sotto trasformazione di gauge

$$\Pi_{\mu\nu}(n) \longrightarrow \Omega(n) \Pi_{\mu\nu}(n) \Omega^\dagger(n) \quad (1.52)$$

ossia $\Pi_{\mu\nu}(n)$ trasforma per congruenza. La traccia della plaquette sarà pertanto una quantità gauge invariante. Il nostro obiettivo sarà ora definire delle funzioni delle variabili di link che tendano ad operatori di campo nel limite continuo.

In particolare abbiamo già quanto basta per scrivere il termine di azione dei campi gluonici. Una delle possibili scelte è l'*azione di Wilson*

$$S_L = \sum_{\square} S_{\square} \quad (1.53)$$

$$S_{\square} = \beta \left\{ 1 - \frac{1}{N_c} \Re[\text{Tr}(\Pi_{\mu\nu})] \right\} \quad (1.54)$$

dove il suffisso “L” (da *lattice*) indica le quantità reticolari mentre $\square$ indicizza l'insieme di tutte le plaquettes del reticolo ($N_c = N_{\text{colours}}$); la normalizzazione è scelta in modo che per una configurazione di campo nullo ($U_\mu(n) = \mathbb{I}_3 \forall \mu \forall n$), $S_L = 0$. Vediamo in che senso la (1.53) descrive l'azione dei campi gluonici.

Se definiamo il tensore $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ come segue

$$\Pi_{\mu\nu} \equiv e^{ig_0 a^2 \mathcal{G}_{\mu\nu}}$$

è possibile metterlo in relazione ai campi gluonici che intervengono tramite i links nella (1.51) facendo uso della formula di Baker-Hausdorff generalizzata al prodotto di più fattori

$$\ln \left(e^{A_1} e^{A_2} \dots e^{A_n} \right) = \sum_i A_i + \frac{1}{2} \sum_{i < j} [A_i, A_j] + \dots \quad (1.55)$$

Ebbene, nel limite $a \longrightarrow 0$ otteniamo, dopo aver rimpiazzato l'operatore differenziale ∂_μ con il rapporto incrementale sul lattice spacing⁶, un'espressione per $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ identica a quella di $G_{\mu\nu}$ definita in (1.7).

Essendo dunque $G_{\mu\nu}$ quello che conosciamo (in particolare a traccia nulla) avremo

$$\text{Tr}(\Pi_{\mu\nu}) = \text{Tr} \left(1 - \frac{1}{2} g_0^2 a^4 (G_{\mu\nu})^2 + \mathcal{O}(a^6) \right)$$

⁶Si riporta per chiarezza la versione discretizzata della derivata:

$$\partial_\mu f(n) \equiv \frac{f(n + \hat{\mu}) - f(n)}{a}$$

con il ché S_L avrà il seguente limite continuo:

$$S_L \xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{\beta g_0^2}{2N_c} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \text{Tr} \int d^4z G_{\mu\nu}^a(z) G_{\mu\nu}^a(z) \quad (1.56)$$

dove i tre fattori $\frac{1}{2}$ vengono dalla (1.3), dalla (1.55) e dalla simmetria dell'integrale sotto scambio $\mu \longleftrightarrow \nu$.

Escludendo il contributo fermionico⁷ possiamo ritrovare le (1.22 – 1.23) ponendo

$$\beta = \frac{2N_c}{g_0^2} \quad (1.57)$$

Avendo definito l'azione di Wilson possiamo ora cimentarci nel calcolo di elementi di matrice facendo uso delle (1.25 – 1.24) qui riscritte in versione reticolare:

$$\langle 0 | O_L[U] | 0 \rangle = \frac{1}{Z_L} \int [dU] O_L[U] e^{-S_L[U]} \quad (1.58)$$

$$Z_L = \int [dU] e^{-S_L[U]} \quad (1.59)$$

- $[dU]$ è la misura di Haar del gruppo e sarà definita nelle sottosezioni 1.2.2 – 1.2.4. Il gruppo è compatto e pertanto l'integrale è sempre finito.
- Nella sottosezione 1.2.5 discuteremo il valore del passo reticolare a in unità fisiche.

1.2.2 Il metodo Monte–Carlo Dinamico

Consideriamo un reticolo di volume finito: siamo riusciti ad esprimere tramite le (1.58 – 1.59) i *VEV* di operatori di campo come risultati dal calcolo di integrali multipli.

Facciamo una stima della complessità che questo richiede [7]. Supponiamo di operare su un reticolo 16^4 : in ognuno dei siti i 4 links dipenderanno (per $SU(3)$) dagli 8 campi gluonici, in totale $16^4 \times 4 \times 8 = 2097152$ variabili. Se tentassimo di utilizzare i consueti metodi di calcolo numerico (es.: Cavalieri-Simpson) prendendo, diciamo, 10 punti dal dominio di ogni variabile, arriveremmo a dover sommare $10^{2097152}$ termini ... un lavoro ben arduo che ci fa desistere. D'altra parte, la presenza nelle (1.58 – 1.59) del fattore esponenziale decrescente, ci porta a pensare che la percentuale di configurazioni che contribuiscono

⁷Ci occuperemo in questo lavoro della teoria di pura gauge (*QCD quenched*), motivo questo che esclude i fermioni dalla nostra trattazione espositiva.

agli integrali in maniera significativa (cioè quelle che realizzano un'azione in prossimità del suo minimo) sia ridotta. Tenteremo pertanto di produrre un set $\{U_i\}_i$ di configurazioni *significative* mediante le quali calcolare le medie dei nostri operatori, rimpiazzando gli integrali con le somme.

$$\langle O_L \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N O_L[U_i] \quad (1.60)$$

Il metodo Monte-Carlo Dinamico si propone di generare tale insieme, con gli U_i distribuiti proporzionalmente a $e^{-S_L[U_i]}$, in modo che $\langle O_L \rangle$ abbia una precisione $\mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{N}})$.

1.2.3 Catene di Markov

Un metodo numericamente efficiente è quello della generazione di una cosiddetta *Catena di Markov* di configurazioni $\{U_0 U_1 \dots U_N \dots\}$ ed è basato su un algoritmo di aggiornamento (*updating*) *senza memoria*; la configurazione n -esima viene cioè generata dalla $(n-1)$ -esima, con una probabilità di transizione $P(U_{n-1} \rightarrow U_n)$, dipendente dall'algoritmo di updating usato ma totalmente indipendente da altre variabili (in particolare dalle precedenti configurazioni della catena). Una caratteristica che l'algoritmo deve soddisfare è quella di avere una distribuzione limite (o distribuzione di equilibrio) $\{\mathcal{P}^{eq}(U_i) \propto e^{-S_L[U_i]}\}_i$, raggiungibile dopo un numero finito di updating, a partire da qualsivoglia configurazione iniziale U_0 .

Le caratteristiche che una catena di Markov deve soddisfare perché valga l'esistenza e l'unicità di tale distribuzione sono tre:

1. a partire da qualsivoglia U_i deve esistere la possibilità di raggiungere, in un numero finito di step, qualsiasi altra configurazione U_j . Questa caratteristica è denominata *irriducibilità*.
2. la catena deve essere aperiodica. Il periodo di una catena viene definito come il massimo comun divisore di $\{n \mid P^n(U_i \rightarrow U_i) > 0, \forall U_i\}$ e la catena si definisce aperiodica se il periodo vale uno, ossia tutti gli stati devono poter tornare in sé stessi in un qualsivoglia numero di step.
3. Il tempo medio di ricorrenza di ogni configurazione possibile deve essere finito: detta p_{ii}^n la probabilità $P(U_i \rightarrow U_i)$ in n steps della catena di Markov (senza che la configurazione U_i sia raggiunta in nessuno tra gli steps intermedi) il tempo medio di ricorrenza è definito come: $\sum_{n=1}^{\infty} n p_{ii}^n$.

Chiameremo *termalizzazione* il passaggio dalla configurazione iniziale alla distribuzione di equilibrio, una volta raggiunta la quale potremo utilizzare la catena di Markov generata lì di seguito per il calcolo della (1.60).

Affinché poi il calcolo dell'operatore fornisca, su N configurazioni, un'incertezza statistica $\mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{N}})$, necessitano altre due condizioni [7]:

1. Anche la varianza, così come la media, del tempo di ricorrenza deve assumere un valore finito.
2. I valori dell'operatore in esame calcolati sulle varie configurazioni devono essere scorrelati tra di loro⁸. Qualora questo non si realizzi, l'analisi statistica ci fornisce vari metodi per estrarre dalla successione dei valori delle sottosuccessioni scorrelate, composte da $\bar{N}$ elementi ($\bar{N} < N$), utilizzando le quali l'incertezza di $\langle O_L \rangle$ venga $\mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{\bar{N}}})$.
 - Prendere i valori uno ogni $\tau_{\text{exp},O}$ dove $\tau_{\text{exp},O}$ esprime il *tempo di decorrelazione*⁹ per l'operatore in analisi.
 - Mediare più valori consecutivi della successione originaria in un unico valore della nuova (*blocking*). Questo procedimento può essere iterato finché le varianze delle sottosuccessioni di volta in volta costruite non raggiungano un valore asintotico (le medie saranno ovviamente invariate).

La condizione necessaria al raggiungimento della distribuzione di equilibrio che il nostro processo di updating deve garantire è quella di fornire delle probabilità di transizione tali che:

$$\int [dU] \mathcal{P}^{eq} [U] P(U \rightarrow U') = \mathcal{P}^{eq} [U'] \quad (1.63)$$

⁸Dal momento che sono i valori di $\{O_L[U_i]\}_i$ a dover essere scorrelati, questo dipenderà fortemente dal tipo di operatore che stiamo studiando. A parità di azione non esistono catene di Markov universalmente utilizzabili per ogni operatore!

⁹Se definiamo, con riferimento alla (1.60), $\delta O_L[U_i] \equiv O_L[U_i] - \langle O_L \rangle$, allora

$$C_{OO}(l) \equiv \langle \delta O_L[U_i] \times \delta O_L[U_{i+l}] \rangle \quad (1.61)$$

è una grandezza che, partendo dal quadrato della varianza di O_L per $l = 0$, raggiunge lo zero per grandi l .

$\rho_{OO}(l) \equiv \frac{C_{OO}(l)}{C_{OO}(0)}$ avrà un tipico andamento esponenziale decrescente [18] ($\sim e^{-\frac{l}{\tau_{\text{exp},O}}}$), dal che possiamo estrarre una stima del tempo di decorrelazione:

$$\tau_{\text{exp},O} \equiv l \quad \left| \quad \rho_{OO}(l) \leq e^{-1} \rho_{OO}(0). \right. \quad (1.62)$$

Questa relazione garantisce proprio la convergenza: una volta raggiunto l'equilibrio il sistema vi permane.

Una condizione sufficiente alla (1.63) è il cosiddetto *principio del bilancio dettagliato*, ossia [19]:

$$\mathcal{P}^{eq}[U] P(U \rightarrow U') = \mathcal{P}^{eq}[U'] P(U' \rightarrow U) \quad (1.64)$$

Descriveremo qui di seguito un algoritmo di updating locale che verifica il predetto principio.

1.2.4 L'algoritmo Metropolis

Partiamo da una configurazione U . L'algoritmo che ci apprestiamo a descrivere [20] agisce sui links uno alla volta (in tal senso diremo che è locale), finché tutti non siano stati passati, e quindi la configurazione nel suo insieme non si sia trasformata in una nuova U' : a questo punto diremo di aver percorso una *sweep*. L'ordine di percorrimiento dei links durante una sweep può essere casuale (purché tutti vengano coinvolti) o predeterminato. Per ogni link $U_\mu(n)$ si segue questa procedura:

1. Si genera un nuovo link $U'_\mu(n)$ che può essere:
 - Completamente casuale;
 - “vicino” al precedente $U_\mu(n)$ secondo un qualche metrica definita in $SU(3)$.

Su questa distinzione torneremo in seguito.

2. Si calcolano le azioni corrispondenti alla configurazione contenente il link di partenza (C) ed a quella contenente il link proposto (C').

A questo punto due casi sono possibili:

- $e^{-S[C]} \geq e^{-S[C']}$, ossia l'azione non aumenta, e questo determina la nostra *accettazione* del link proposto;
- $e^{-S[C]} < e^{-S[C']}$, ossia l'azione aumenta. In questo caso accettiamo il nuovo link con probabilità $\mathcal{P} = e^{-(S[C']-S[C])}$. Dal punto di vista operativo generiamo un numero random $r \in [0, 1]$ ed accettiamo $U'_\mu(n)$ solo se $r < \mathcal{P}$.

3. Passiamo ad un nuovo link¹⁰.

¹⁰Segnaliamo per completezza che esistono delle versioni del Metropolis dove l'aggiornamento di ogni singolo link viene ripetuto più volte prima di passare al successivo.

Il fatto di vincolare $U_\mu'(n)$ a rimanere vicino a $U_\mu(n)$ può essere utile quando l'azione raggiunge dei minimi molto stabili: in quei casi, a variazioni brusche del link, corrispondono delle basse probabilità di accettazione $\mathcal{P}$ ed il sistema tende a non aggiornarsi. Per contro, una eccessiva vicinanza dei links proposti a quelli vecchi provocherà una ovvia lentezza nell'evoluzione del sistema.

1.2.5 Il limite continuo

Abbiamo visto come, operando su un reticolo di volume finito, possiamo ottenere i VEV dei nostri operatori facendo uso dell'azione di Wilson definita nelle (1.53 – 1.54).

Nell'azione compaiono, tramite l'espressione delle plaquettes, le nostre variabili dinamiche (links) e nient'altro eccetto β . Tutti gli operatori che costruiremo sul reticolo saranno in generale quantità adimensionate espresse in unità di lattice spacing. Il quale ovviamente non compare in maniera esplicita.

Come effettuare allora il limite per $a \rightarrow 0$?

E dove ricercare traccia di “ a ” ?

La spiegazione é che esiste un legame tra la nostra β ed “ a ”.

Rivediamo la nostra trattazione nel formalismo del gruppo RG.

Abbiamo regolarizzato la teoria mettendo come unità di base del reticolo il lattice spacing e ciò induce un cut off nello spazio degli impulsi. Abbiamo visto nella (1.1.4) come sia possibile, fissando una scala di massa μ , sottrarre le divergenze che si ottengono rimuovendo il cut off (nel nostro caso facendo tendere a a 0). Avremo una dipendenza delle quantità rinormalizzate dalla massa μ sancita dalle equazioni del gruppo di rinormalizzazione.

In particolare avremo una g_R

$$g_R = g_R(g_0, a, \mu) = g_R(g_0, a\mu) \quad (1.65)$$

dove l'ultima uguaglianza risulta evidente dall'analisi dimensionale. Se imponiamo, in modo assolutamente analogo a quanto già fatto nella (1.1.4), l'indipendenza di g_R da a , applicando alla (1.65) l'operatore $a \frac{d}{da}$ otterremo

$$a \frac{d}{da} g_R = a \frac{\partial g_R}{\partial a} + a \frac{\partial g_R}{\partial g_0} \frac{\partial g_0}{\partial a} = 0$$

da cui, tenendo conto che g_R é funzione di $(a\mu)$,

$$\begin{aligned} \text{segue che} \quad & \beta(g_R) = \frac{\partial g_R}{\partial g_0} \beta_L(g_0) \\ \text{con} \quad & \beta(g_R) = \mu \frac{\partial g_R}{\partial \mu} \\ \text{e} \quad & \beta_L(g_0) \equiv -a \frac{\partial g_0}{\partial a} \end{aligned} \quad (1.66)$$

Sfruttando poi il fatto che $g_R = g_0 + \mathcal{O}(g_0^2)$, si ha che l'espressione della β_L nel suo argomento g_0 ha, almeno fino ai primi due ordini perturbativi, la stessa espressione in forma della $\beta(g_R)$, ossia coincide con la funzione di Callan–Symanzik, con il ché la soluzione della (1.66) viene ad essere¹¹:

$$a = \frac{1}{\Lambda_L} e^{-\frac{1}{2\beta_0 g_0^2}}$$

La relazione che lega Λ_L alla $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}$ definita nella (1.45) è, ancora una volta dal confronto con i dati sperimentali, $\Lambda_{\overline{\text{MS}}} \simeq 39\Lambda_L$.

Supponiamo ora di misurare sul reticolo una quantità O le quali dimensioni in massa siano $(-D)$ ($\hat{O}$ sarà il corrispettivo di O misurato in unità inverse di lattice spacing). Per ogni β avremo :

$$\hat{O}(\beta) = a^D(\beta) O(\beta)$$

Nel sospirato limite continuo ci aspettiamo una convergenza asintotica di $O(\beta)$ ad un valore fisso, individuabile da una relazione di scaling:

$$\frac{\hat{O}(\beta)}{\hat{O}(\beta')} = \left[\frac{a(\beta)}{a(\beta')} \right]^D \quad (1.67)$$

Il nostro reticolo ha un volume finito, volume che rimpicciolisce al diminuire di “a”. Nel momento in cui le lunghezze di correlazione della teoria eccedono le dimensioni del reticolo le nostre misure perdono ogni pretesa di veridicità: in particolare anche la relazione (1.67) cesserà di valere. Sarà proprio la (1.67) a guidarci nella ricerca del compromesso, il parametro che ci indicherà la regione ottimale dei β in cui operare; tale regione viene detta *finestra di scaling*.

¹¹Notiamo che lo stesso meccanismo che ci aveva condotto alla libertà asintotica, ora ci porta al limite

$$a \xrightarrow{g_0 \rightarrow 0} 0 \quad \text{ossia} \quad a \xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} 0$$

Capitolo 2

Istantoni in QCD

2.1 Soluzioni classiche ad azione finita

2.1.1 Topologia e vuoti classici

Abbiamo sviluppato la nostra esposizione della QCD servendoci del formalismo lagrangiano. Senza perdere di generalità fissiamo la scelta della gauge, per comodità di calcolo in quello che seguirà, in quella che viene detta *gauge temporale* ($A_4 = 0$). Passiamo ora ad un approccio hamiltoniano, nel quale i momenti coniugati ai campi di gauge risultano essere i campi *cromoelettrici* $E_i = \partial_4 A_i$. Scriviamo dunque l'hamiltoniana in termini di campo cromoelettrico e campo *cromomagnetico* B_i , dove quest'ultimo viene ad essere il tensore duale alla parte spaziale di $G_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{1}{2g^2} \int d^3x (E_i^2 + B_i^2) & (A_4 = 0) \\ B_i &\equiv \tilde{G}_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} G_{jk} & (E_i \equiv G_{4i})\end{aligned}\tag{2.1}$$

L'hamiltoniana (2.1) viene ad essere coincidente con quello che ci aspettiamo nel momento in cui sostituiamo B_i come funzione dei campi gluonici.

In componenti ¹:

$$\begin{aligned} B_i^a &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} (\partial_j A_k^a - \partial_j A_k^a + f_{abc} A_j^b A_k^c) \\ &= (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}^a)_i + \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} f_{abc} A_j^b A_k^c. \end{aligned}$$

Vediamo che alla canonica definizione di rotore viene aggiunto un altro pezzo (solo per le teorie di Yang–Mills, per le quali $f_{abc} \neq 0$). Le soluzioni ovvie che realizzano un minimo della (2.1) saranno quelle in cui i campi di gauge sono fissati ovunque ad essere costanti. Ma sono le uniche? Torniamo all’equazione di trasformazione (1.6): se scegliamo una $\Omega(\vec{x})$ indipendente dal tempo, la gauge temporale rimane tale. Sfruttando questa “simmetria residua” possiamo tentare di costruire soluzioni non banali. Scegliamo dunque i campi in modo che siano di “pura gauge”, tralasciando di mettere pezzi costanti poiché già da ora vogliamo $A_\mu \rightarrow 0$ per $x \rightarrow \infty$

$$A_\mu = i \Omega(\vec{x}) \partial_\mu \Omega^\dagger(\vec{x}) \quad (2.2)$$

Volendo ora classificare tutti i possibili *stati di vuoto* della teoria, occorrerà studiare l’insieme di quelle applicazioni $\Omega : \mathbb{R}^3 \mapsto SU(N)$, anche se in pratica possiamo restringerci a quelle matrici che soddisfano $\Omega(\vec{x}) \rightarrow \mathbb{I}_N$ per $x \rightarrow \infty$ [21].

Questo dominio ($\mathbb{R}^3$ con i punti all’infinito identificati) è topologicamente equivalente alla sfera tridimensionale S_3 , a sua volta isomorfa al gruppo non abeliano $SU(2)$: questo sarà un punto molto importante per quello che seguirà. Le Ω di cui ci stiamo occupando non sono necessariamente bigettive.

In generale il codominio (cioè il gruppo $SU(N)$) viene ricoperto un certo numero di volte: chiameremo questo numero ($n_W \in \mathbb{Z}$) *winding number*, o *indice di Pontryagin*. È possibile estrarre il winding number dalla particolare Ω usata, mediante la seguente equazione:

$$n_W = \frac{1}{24\pi^2} \int d^3x \varepsilon_{ijk} \text{Tr} \left[(\Omega^\dagger \partial_i \Omega) (\Omega^\dagger \partial_j \Omega) (\Omega^\dagger \partial_k \Omega) \right]$$

Espresso in funzione dei campi di gauge questo numero viene usualmente chiamato caratteristica di Chern–Simons:

$$n_{CS} = \frac{1}{16\pi^2} \int d^3x \varepsilon_{ijk} \left(A_i^a \partial_j A_k^a + \frac{1}{3} f_{abc} A_i^a A_j^b A_k^c \right)$$

A questo punto conviene focalizzare alcuni aspetti:

¹abbiamo preso per $G_{\mu\nu}$ l’espressione data in (1.9); d’ora in poi considereremo i campi come classici, riscaldati dalla costante d’accoppiamento che figurerà fattorizzata fuori da $\mathcal{H}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{S}$ etc.

- Prendere un campo di pura gauge, generato da una $\Omega(\vec{x})$ come nella (2.2), equivale ad effettuare una trasformazione di gauge del tipo (1.6) su un campo nullo $A_\mu^a = 0$.
Lo stato di vuoto così realizzato sarà indicato con $|\Omega\rangle$.
- Fare una trasformazione di gauge su di uno stato di vuoto $|\Omega\rangle$ mediante una Ω' è completamente equivalente a creare uno stato di vuoto $|\Omega''\rangle$ mediante una $\Omega'' = \Omega'\Omega$.
- Con riferimento al punto precedente, se indichiamo con $n_W(\Omega)$ l'indice di Pontryagin dello stato $|\Omega\rangle$ vale la seguente regola di addizione: $n_W(\Omega'') = n_W(\Omega') + n_W(\Omega)$.

Il winding number effettua quindi una partizione in classi di equivalenza (chiamate classi di omotopia) nell'insieme delle applicazioni di cui ci stiamo occupando.

Siccome queste classi sono diverse dal punto di vista topologico (ovviamente $n_W(\Omega)$ non è una funzione continua) non è realizzabile passare da un tipo di vuoto all'altro mediante una deformazione continua dei campi di gauge, senza che il vincolo $\mathcal{H} = 0$ si rompa.

2.1.2 L'istantone di Belavin–Polyakov–Schwartz–Tyupkin

Per quanto esposto finora non sembra proprio esserci modo che vuoti appartenenti a classi diverse possano connettersi in una specie di effetto tunnel quantistico. Almeno non con le ipotesi fatte. Alleggeriamo dunque il carico dei nostri vincoli rinunciando d'ora in poi alla continuità dei campi di gauge. Sia $\tilde{G}_{\mu\nu}$ il tensore duale di $G_{\mu\nu}$, ossia

$$\tilde{G}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} G_{\rho\sigma} \quad (2.3)$$

Riscriviamo in questa forma l'azione della nostra teoria;

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4g^2} \int d^4x G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a \\ &= \frac{1}{4g^2} \int d^4x \left[\pm G_{\mu\nu}^a \tilde{G}_{\mu\nu}^a + \frac{1}{2} (G_{\mu\nu}^a \mp \tilde{G}_{\mu\nu}^a)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.4)$$

Questa relazione è senz'altro vera.

Definiamo *(anti)–selfduale* un campo quando $G_{\mu\nu} = \pm \tilde{G}_{\mu\nu}$ (anti–selfduale quando c'è il segno meno). Per i campi (anti)–selfduali valgono delle proprietà molto interessanti:

- L'azione ha un minimo in corrispondenza di tali soluzioni (è evidente dalla (2.4));
- La densità di energia è zero ovunque;
- Soddisfano le equazioni del moto $D_\mu G_{\mu\nu} = 0^2$.

È possibile definire un indice di Pontryagin quadridimensionale, che denomineremo *carica topologica*, che nel caso dei campi (anti)–selfduali viene proporzionale all'azione

$$Q = \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x G_{\mu\nu}^a \tilde{G}_{\mu\nu}^a \quad (2.5)$$

$$S = \frac{8\pi^2}{g^2} |Q| \quad (2.6)$$

E facile vedere che Q è l'integrale di una derivata totale:

$$Q = \int d^4x \partial_\mu K_\mu = \int d\sigma_\mu K_\mu \quad (2.7)$$

$$\text{con} \quad K_\mu = \frac{1}{16\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \left(A_\nu^a \partial_\rho A_\sigma^a + \frac{1}{3} f_{abc} A_\nu^a A_\rho^b A_\sigma^c \right) \quad (2.8)$$

Se ci occupiamo di configurazioni ad azione finita, A_μ non può che andare a zero all'infinito, dove assumerà una forma di pura gauge. Se ora prendiamo un grosso cilindro con asse lungo la scala del tempo, di altezza e raggio infiniti e ci calcoliamo il flusso di K_μ per ottenere la carica topologica otteniamo:

$$Q = \int d^3x K_4(\vec{x}, t = +\infty) - \int d^3x K_4(\vec{x}, t = -\infty) \quad (2.9)$$

ossia $n_{CS}(t = +\infty) - n_{CS}(t = -\infty)$

Configurazioni con $Q \neq 0$ connettono stati di vuoto appartenenti a classi di omotopia diverse.

Cerchiamo dunque di vedere se esistono soluzioni di questo tipo: iniziamo con $Q = +1$, studiando il più semplice gruppo non abeliano $SU(2)$. Possiamo calcolarci un campo di pura gauge, nostro prerequisito sulla sfera S_3 (ossia la

2

$$D_\mu G_{\mu\nu} = \pm D_\mu \tilde{G}_{\mu\nu} = \pm \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} D_\mu G_{\rho\sigma} = \pm \frac{1}{6} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (D_\mu G_{\rho\sigma} + D_\rho G_{\sigma\mu} + D_\sigma G_{\mu\rho}) = 0$$

infatti $(D_\mu G_{\rho\sigma} + D_\rho G_{\sigma\mu} + D_\sigma G_{\mu\rho}) = 0$ (Identità di Bianchi)

superficie di una sfera quadridimensionale di raggio infinito), partendo da una $\Omega = i\hat{x}_\mu \tau_\mu^+$ ($\tau_\mu^\pm \equiv (\vec{\tau}, \mp i)$) dove con $\vec{\tau}$ abbiamo indicato le matrici di Pauli) ed applicando la (2.2): il campo risultante è

$$A_\mu^a = \frac{2\eta_{a\mu\nu}x_\nu}{x^2} \quad (2.10)$$

dove abbiamo introdotto il simbolo $\eta_{a\mu\nu}$ di 't Hooft le cui definizioni e proprietà stanno riportate in appendice A. Questa forma va bene su S_3 , ma non ci permette di certo alcun tunnelling, a meno di “revisioni” opportune. Moltiplichiamo pertanto A_μ per una $f(x^2)$ che abbia limite 1 sulla sfera S_3 . Imponendo la dualità perveniamo ad un'equazione differenziale della quale riportiamo la soluzione:

$$f(1-f) - x^2 \frac{df}{d(x^2)} = 0 \quad (2.11)$$

$$f = \frac{x^2}{x^2 + \rho^2} \quad (2.12)$$

dal ch  la forma della nostra soluzione, o meglio soluzione di Belavin–Polyakov–Schwartz–Tyupkin che prende il nome di *istantone*) viene ad essere:

$$A_\mu^a = \frac{2\eta_{a\mu\nu}x_\nu}{x^2 + \rho^2} \quad (2.13)$$

$$G_{\mu\nu}^a = \tilde{G}_{\mu\nu}^a = -\frac{4\rho^2}{(x^2 + \rho^2)^2} \eta_{a\mu\nu} \quad (2.14)$$

“ ρ ”   qui un parametro arbitrario, che specifica la grandezza dell'istantone. In modo analogo, utilizzando τ_μ^- al posto di τ_μ^+ ,   facile ottenere la soluzione con $Q = -1$, che sar  denominata *antiistantone*:

$$A_\mu^a = \frac{2\bar{\eta}_{a\mu\nu}x_\nu}{x^2 + \rho^2} \quad (2.15)$$

$$G_{\mu\nu}^a = -\tilde{G}_{\mu\nu}^a = -\frac{4\rho^2}{(x^2 + \rho^2)^2} \bar{\eta}_{a\mu\nu} \quad (2.16)$$

  interessante notare che per $x \rightarrow \infty$, mentre $G_{\mu\nu}$ rimane ben localizzato ($\simeq \frac{1}{x^4}$), A_μ ha un decadimento pi  dolce, a lungo raggio ($\simeq \frac{1}{x}$). Questa singolarit  all'infinito pu  essere spostata, ad esempio nell'origine, mediante una trasformazione di gauge. Operando sulle (2.13 – 2.14) mediante l'uso della (1.6) con $\Omega = i\hat{x}_\mu \tau_\mu^+$, otteniamo:

$$A_\mu^a = 2 \frac{x_\nu}{x^2} \frac{\bar{\eta}_{a\mu\nu}\rho^2}{x^2 + \rho^2} \quad (2.17)$$

$$G_{\mu\nu}^a = -\frac{4\rho^2}{(x^2 + \rho^2)^2} \rho^4 \left(\bar{\eta}_{a\mu\nu} - 2\bar{\eta}_{a\mu\alpha} \frac{x_\alpha x_\nu}{x^2} - 2\bar{\eta}_{a\alpha\nu} \frac{x_\mu x_\alpha}{x^2} \right) \quad (2.18)$$

Questa scelta viene identificata con il nome di *gauge singolare*³.

Le (2.15 – 2.16) verranno trasformate in equazioni analoghe alle (2.17 – 2.18) con $\bar{\eta} \leftrightarrow \eta$. Da notare come in questa gauge l'istantone sia costruito con la $\bar{\eta}$ mentre l'antiistantone con la η .

Una quantità invariante di gauge identica sia per istantone che per antiistantone è:

$$(G_{\mu\nu}^a)^2 = \frac{192 \rho^4}{(x^2 + \rho^2)^4} \quad (2.19)$$

Per la derivazione di quest'ultima equazione ed altre simili quantità si rimanda all'appendice A.

2.1.3 Variabili collettive di una pseudoparticella in $SU(N)$

La soluzione classica dell'istantone cui siamo pervenuti dipende da un certo numero di variabili note in letteratura come *variabili collettive*. Occupiamoci ora specificamente del caso $SU(2)$ rimandando a dopo l'ampliamento al generico $SU(N)$.

La soluzione trovata è caratterizzata dal raggio dell'istantone (o *size*) ρ .

La simmetria sotto traslazioni ci dice che se $A_\mu^a(x)$ è soluzione, anche $A_\mu^a(x - x^0)$ lo è. In particolare un generico istantone in gauge singolare potrà essere scritto come

$$A_\mu^a(x) = 2 \frac{(x_\nu - x_\nu^0)}{(x - x^0)^2} \frac{\bar{\eta}_{a\mu\nu} \rho^2}{(x - x^0)^2 + \rho^2} \quad (2.20)$$

Le quattro coordinate x_ν^0 indicheranno il centro dell'istantone. Dobbiamo inoltre tenere conto di tre ulteriori parametri che determinano l'orientazione nello spazio di colore. Operando infatti una rotazione rigida in $SU(2)$ mediante una matrice U otterremo nuovamente un istantone:

$$A_\mu \rightarrow U A_\mu U^\dagger$$

o analogamente $A_\mu^a \rightarrow R^{ab} A_\mu^b$ dove $R^{ab} = \frac{1}{2} \text{Tr} (U \tau^a U^\dagger \tau^b)$

Per come è stata costruita la configurazione istantonica le rotazioni in $\mathbb{R}^4$ non generano ulteriori soluzioni. Dimostriamo qui di seguito questa affermazione: tanto x_μ quanto il campo $\Omega(x)$ con il quale abbiamo costruito l'istantone appartengono alla rappresentazione $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ di $SU(2) \times SU(2)$, quest'ultimo localmente isomorfo ad $SO(4)$ nel quale siamo soliti vedere x_μ . Se infatti, con

³Da notare che le grandezze fisiche (densità di energia o di carica topologica etc.) non risentono di questa singolarità

riferimento alla parte destra della (1.6), operiamo sui campi $A_\mu(x)$ e $\Omega(x)$ con

$$\Omega(x) \rightarrow \Omega(x) U_1^\dagger \quad A_\mu(x) \rightarrow U_1 A_\mu(x) U_1^\dagger$$

lasciando intatte le trasformazioni di gauge. Sotto questo $U_1 \in SU(2)$, $\Omega(x) \in (\frac{1}{2})$ e $A_\mu(x) \in (1)$. In più, anche una volta che abbiamo fissato la gauge, la teoria è ancora invariante rispetto a delle rotazioni globali isotopiche per A_μ , del tipo

$$\Omega(x) \rightarrow U_2 \Omega(x) \quad A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x)$$

Sotto questo nuovo $U_2 \in SU(2)$, $\Omega(x) \in (\frac{1}{2})$ e $A_\mu(x) \in (0)$. Pertanto, sotto le trasformazioni definite da U_1 e U_2 , $\Omega(x) \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e $A_\mu(x) \in (1, 0)$. Scelti dunque sei angoli di rotazione in $SU(2) \times SU(2)$ per le coordinate spazio-temporali è possibile determinare altri 6 angoli nel gruppo di U_1 e U_2 sopra descritto affinché l'oggetto $x_\mu \tau_\mu^+$ rimanga inalterato (ossia venga ad avere uno "spin" zero).

Ma $\left(i \frac{x_\mu \tau_\mu^+}{\sqrt{x^2}}\right)$ altri non era che la $\Omega(x)$ utilizzata per creare l'istantone nella nostra procedura che ci ha portato alla (2.10), quindi:

le rotazioni quadridimensionali possono venir riassorbite nelle rotazioni nel gruppo di colore.

Detto questo, ricordando che la trasformazione definita dalla matrice U_1 lascia invariati i campi di gauge, concludiamo che le trasformazioni definite dalla matrice U_2 sono le uniche che costituiscono gradi di libertà effettivi; in particolare, essendo $U_2 \in SU(2)$, trattasi di 3 gradi di libertà.

Che cosa succede per $SU(N)$? Vale la pena ricordare il

Teorema 1 (di Roul Bott) *Dato un gruppo G di Lie semplice (non abeliano), ogni funzione continua $f : S_3 \rightarrow G$ può essere deformata con continuità in un'altra funzione $g : S_3 \rightarrow H$ dove H è un sottogruppo $SU(2)$ di G .*

Questo si traduce nel fatto che ogni istantone di $SU(N)$ può essere visto come un sottogruppo appartenente all'algebra di $SU(2)$, poi ruotato nel gruppo $SU(N)$. Si ottengono cioè degli istantoni in $SU(N)$ per *embedding* delle soluzioni $SU(2)$ trattate finora.

Quanti i gradi di libertà in questo caso?

È chiaro che le cinque variabili collettive associate a traslazioni e dilatazioni rimarranno le stesse del sottogruppo mentre quelle associate con le rotazioni nel gruppo cambieranno. In $SU(2)$ erano tre e in $SU(N)$ corrisponderanno, ad esempio, ai tre generatori dell'algebra aventi elementi nella sotto-matrice (2×2) in alto a sinistra (blocco $[A]$ in figura 2.1): ad esempio per $SU(3)$ saranno le λ_1 ,

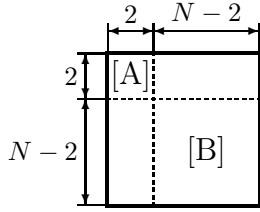


Figura 2.1: Scomposizione a blocchi di una matrice appartenente all'algebra di $SU(N)$

λ_2 e λ_3 di Gell-Mann). Degli $(N^2 - 1)$ generatori di $SU(N)$, gli $(N - 2) \times (N - 2)$ siti nel blocco [B] ovviamente non riusciranno a ruotare il nostro istantone. Tutti i rimanenti elementi di matrice, ossia $(N^2 - 1) - (N - 2)^2 = 4N - 5$, cui sono da aggiungere i cinque gradi di libertà dilatazionali e traslazionali esclusi dal conteggio, costituiranno invece le $4N$ coordinate collettive per il gruppo $SU(N)$.

2.2 Densità delle pseudoparticelle in $SU(N)$

Il metodo che useremo per determinare la densità delle nostre pseudoparticelle come funzione delle variabili introdotte finora si basa sulla formulazione del path-integral con sviluppi quadratici dell'azione intorno a punti sella (le pseudoparticelle appunto). Dal momento che incontreremo divergenze ultraviolette avremo anche necessità di regolarizzare e rinormalizzare la teoria: divideremo pertanto il lavoro in vari step.

Prima di tutto, al fine di presentare la tecnica standard di espansione dell'azione, ci serviremo di un modello preso a prestito dalla meccanica classica, ambiente più agevole da trattare nello sviluppo della formulazione ed esecuzione dei calcoli. Quello che faremo nella QCD non sarà altro che una generalizzazione della procedura che imposteremo in queste prime sottosezioni.

2.2.1 Problema unidimensionale di potenziale

Consideriamo il problema di un punto materiale di massa $m = 1$ in un potenziale $V(x)$ descritto quindi dalla lagrangiana $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x)$.

Occupiamoci della transizione tra due punti di inizio e fine traiettoria (x_i e x_f) in un tempo t_0 . Secondo la prescrizione di Feynman dovremo considerare nell'integrale funzionale la somma di tutti i cammini tra $(x_i, -\frac{t_0}{2})$ e $(x_f, \frac{t_0}{2})$.

Per l'ampiezza di transizione avremo:

$$\langle x_f | e^{-i\hat{H}t_0} | x_i \rangle = \mathcal{N} \int [Dx] e^{iS(x)} \quad (2.21)$$

con $S = \int_{-\frac{t_0}{2}}^{\frac{t_0}{2}} dt \mathcal{L}$

dove: $[Dx]$ indicherà l'integrazione su tutte le funzioni $x(t)$
 con condizioni al bordo $x(-\frac{t_0}{2}) = x_i$ e $x(\frac{t_0}{2}) = x_f$.
 e $\mathcal{N}$ è un fattore di normalizzazione

Se consideriamo stati ad energia definita ($h|n\rangle = E_n|n\rangle$) possiamo riscrivere la (2.21) come

$$\langle x_f | e^{-i\hat{H}t_0} | x_i \rangle = \sum_n e^{-iE_n t_0} \langle x_f | n \rangle \langle n | x_i \rangle.$$

Se poi, e questo sarà il nostro obiettivo nel trattamento della QCD, siamo interessati allo stato di energia minima, converrà passare alla formulazione euclidea convertendo così gli esponenziali oscillanti in esponenziali decrescenti. Prendendo il limite per $t_0 \rightarrow \infty$ (ora $\tau_0 \rightarrow \infty$)

$$\langle x_f | e^{-i\hat{H}t_0} | x_i \rangle \longrightarrow e^{-E_0 \tau_0} \psi_0(x_f) \psi_0^*(x_i)$$

Per l'azione avremo: $S_E[X(\tau)] \equiv -i S[X(t)] = \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{\frac{\tau_0}{2}} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + V(x) \right] d\tau.$

Ancora una volta ometteremo di apporre l'indice "E" a tutte le grandezze che riporteremo, sottintendendo in quanto seguirà l'uso del riferimento euclideo. La (2.21) diventerà ora

$$\langle x_f | e^{-\hat{H}\tau_0} | x_i \rangle = \mathcal{N} \int [Dx] e^{-S(x)} \quad (2.22)$$

Dobbiamo ora meglio definire la variabile di integrazione $[Dx]$.

Scelta una $X(\tau)$ che soddisfa le condizioni al contorno assegnate, ogni funzione $x(\tau)$ del nostro integrale potrà essere scritta come $x(\tau) = X(\tau) + \sum_n c_n x_n(\tau)$ purché le $\{x_n(\tau)\}_n$ siano un insieme completo ed abbiano condizioni al contorno $x_n(\pm \frac{\tau_0}{2}) = 0$.

Possiamo dunque scegliere come misura di integrazione $[Dx] = \prod_n \frac{dc_n}{\sqrt{2\pi}}.$

I $\sqrt{2\pi}$ a denominatore sono solo una notazione giacché non è stato ancora fissato il fattore $\mathcal{N}$ davanti all'integrale.

Siccome vogliamo espandere l'integrale in prossimità di un minimo dell'azione sarà opportuno scegliere per $X(\tau)$ proprio quella $x(\tau)$ che realizza tale condizione, ossia l'equazione del moto classica

$$\frac{d^2 X(t)}{dt^2} = -V'(X(t)) \xrightarrow{\text{riferimento euclideo}} \frac{d^2 X(\tau)}{d\tau^2} = V'(X(\tau)) \quad (2.23)$$

Sviluppando dunque l'azione intorno a $X(\tau)$:

$$\begin{aligned} S[X(\tau) + \delta x(\tau)] &= \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{\frac{\tau_0}{2}} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dX(\tau)}{d\tau} + \frac{d\delta x(\tau)}{d\tau} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + V(X) + V'(X)\delta x + \frac{1}{2}V''(X)(\delta x)^2 + \dots \right] d\tau = \\ &= \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{\frac{\tau_0}{2}} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dX(\tau)}{d\tau} \right)^2 + V(X) \right] d\tau + \\ &\quad + \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{\frac{\tau_0}{2}} \left[\left(\frac{dX(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{d\delta x(\tau)}{d\tau} \right) + V'(X)\delta x \right] d\tau + \\ &\quad + \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{\frac{\tau_0}{2}} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\delta x(\tau)}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{2}V''(X)(\delta x)^2 \right] d\tau + \dots = \\ &= \quad \left(\begin{array}{l} \text{integrando} \\ \text{per parti} \end{array} \right) = S[X(\tau)] + \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{\frac{\tau_0}{2}} \delta x(\tau) \left[-\frac{d^2 X(\tau)}{d\tau^2} + V'(X) \right] d\tau + \\ &\quad + \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{\frac{\tau_0}{2}} \delta x(\tau) \left[-\frac{1}{2} \frac{d^2 \delta x(\tau)}{d\tau^2} + \frac{1}{2}V''(X)\delta x(\tau) \right] d\tau + \dots = \\ &= S_0 + \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{\frac{\tau_0}{2}} \delta x(\tau) \left[-\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\tau^2} + \frac{1}{2}V''(X) \right] \delta x(\tau) d\tau + \dots \\ \text{cioè} \quad \delta S &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{\frac{\tau_0}{2}} \delta x \left[-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(X) \right] \delta x d\tau + \mathcal{O}((\delta x)^3) \quad (2.24) \end{aligned}$$

Supponiamo ora di avere un set completo di funzioni ortonormali che diagonalizzi l'operatore in parentesi quadre nella (2.24), ossia un set $\{x_n(\tau)\}_n$ tale che

$$\left[-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(X) \right] x_n(\tau) = \varepsilon_n x_n(\tau) \quad (2.25)$$

⁴Questo integrale non è altro che l'azione minima.

⁵Questa parentesi quadra, come è evidente dalla (2.23), fa esattamente zero.

allora, come conseguenza dell'ortonormalità,

$$S = S_0 + \frac{1}{2} \sum_n \varepsilon_n c_n^2 \quad (2.26)$$

Qualora, e questo non è sempre il caso, gli $\{\varepsilon_n\}_n$ siano tutti positivi, l'integrale funzionale si trasforma in un integrale gaussiano, la cui soluzione è:

$$\langle x_f | e^{-\hat{H}\tau_0} | x_i \rangle = e^{-S_0} \mathcal{N} \prod_n \varepsilon_n^{-\frac{1}{2}} \equiv \quad (2.27)$$

$$\equiv e^{-S_0} \mathcal{N} \left[\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(X) \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (2.28)$$

(l'ultima uguaglianza è in realtà una definizione, una notazione presa a prestito dall'analoga espressione nel caso di matrici a dimensione finita).

Ma che cosa accade quando un autovalore fa zero?

Prima di tutto descriviamo il significato fisico di questi autovalori. Spostandoci dalla traiettoria corrispondente all'azione minima S_0 in una direzione $x_i(\tau)$, S non potrà che aumentare o al più rimanere invariata: questo, interpretando la (2.26) ci dice cosa significano autovalori rispettivamente positivi o nulli e perché non possano essere negativi. Un autovalore nullo corrisponderà dunque ad un'autofunzione (che definiremo *modo zero*) che non varia l'azione. È chiaro che su tali modi l'integrazione non potrà più essere gaussiana ma andrà eseguita direttamente; i modi a frequenza positiva potranno invece essere integrati come già descritto ed useremo il simbolo “ $\det'$ ” per intendere la restrizione a modi solo positivi.

Rimangono due problemi aperti:

- Come calcolare il fattore di normalizzazione $\mathcal{N}$;
- Come integrare i modi zero.

Negli esempi che seguiranno daremo una risposta a questi due interrogativi.

Particella libera

Dimentichiamoci per un momento di quanto esposto finora e calcoliamo in modo “classico” il propagatore

$$\begin{aligned}
 \langle x_f | e^{-\frac{\hat{p}^2 \tau_0}{2}} | x_i \rangle &= \sum_{n,m} \langle x_f | p_n \rangle \langle p_n | e^{-\frac{\hat{p}^2 \tau_0}{2}} | p_m \rangle \langle p_m | x_i \rangle = \\
 &= \sum_n \langle x_f | p_n \rangle \langle p_n | x_i \rangle e^{-\frac{p_n^2 \tau_0}{2}} = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{-\frac{p^2 \tau_0}{2}} e^{ip \Delta x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_0}} e^{-\frac{(\Delta x)^2}{2\tau_0}} = \\
 (\text{se } \Delta x \equiv x_f - x_i = 0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_0}}. \tag{2.29}
 \end{aligned}$$

D'altra parte, applicando i principi fin qui esposti, se consideriamo $x_i = x_f = 0$, possiamo scegliere $X(\tau) = 0 \quad \forall \tau$, $\{x_n(\tau)\}_n = \left\{ \cos\left(\frac{\pi n}{\tau_0}\right) \right\}_n$ ottenendo come autovalori

$$-\frac{d^2}{d\tau^2} \cos\left(\frac{\pi n \tau}{\tau_0}\right) = \frac{\pi^2 n^2}{\tau_0^2} \cos\left(\frac{\pi n \tau}{\tau_0}\right)$$

e quindi, dalla (2.27),

$$\mathcal{N} \left(\prod_n \frac{\pi^2 n^2}{\tau_0^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_0}} \tag{2.30}$$

Questo risultato serve a fissare $\mathcal{N}$ in molti altri casi e sarà utilizzato in seguito.

Oscillatore armonico

Prendiamo in considerazione un oscillatore caratterizzato da $V(x) = \frac{\omega^2}{2}x^2$ con $x_i = x_f = 0$. Descriviamo qui di seguito una prescrizione che per questo esempio apparirà superflua ma sarà utile per il caso successivo.

Determinare la $X(\tau)$ che rende l'azione minima equivale a determinare la soluzione delle equazioni del moto per un analogo problema di potenziale $U(x) \equiv -V(x)$ nell'ordinario spazio di Minkowski, come evidente dalla (2.23).

In questo caso avremo dunque da determinare la traiettoria che rende l'azione minima e finita, tra $x_i = 0$ e $x_f = 0$ con un potenziale $U(x) = -\frac{\omega^2}{2}x^2$ (vedi figura 2.2). L'unica soluzione possibile risulta allora essere $X(\tau) = 0 \quad \forall \tau$; qualunque altra traiettoria che inizi da $x = 0$ porterà l'azione a divergere allorché

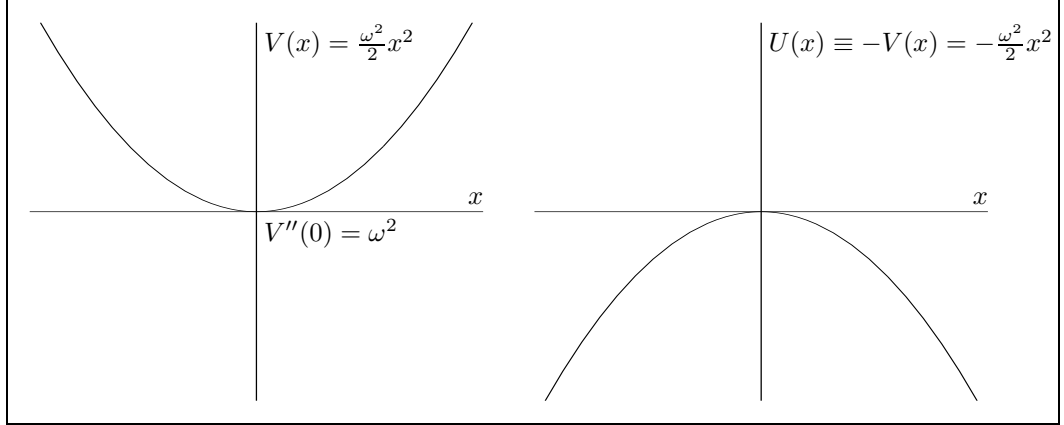


Figura 2.2: Trasformazione del problema “reale” dell’oscillatore armonico in un problema “fittizio” con potenziale invertito.

τ_0 verrà fatto tendere a infinito.

Le $\{x_n(\tau)\}_n$ dell’esempio precedente vanno ancora bene e gli autovalori vengono ora ad essere $\varepsilon_n = \frac{\pi^2 n^2}{\tau_0^2} + \omega^2$ con il che:

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | e^{-\hat{H}\tau_0} | 0 \rangle &= \mathcal{N} \prod_n \left(\frac{\pi^2 n^2}{\tau_0^2} + \omega^2 \right)^{-\frac{1}{2}} = \\
 &= \left[\mathcal{N} \prod_n \left(\frac{\pi^2 n^2}{\tau_0^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right]^6 \left[\prod_n \left(1 + \frac{\omega^2 \tau_0^2}{\pi^2 n^2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_0}} \cdot \left(\frac{\sinh(\omega\tau_0)}{\omega\tau_0} \right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{\omega}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} (2 \sinh(\omega\tau_0))^{-\frac{1}{2}} \quad (2.31)
 \end{aligned}$$

Facendo il limite per $\tau_0 \rightarrow \infty$ otteniamo

$$\langle 0 | e^{-\hat{H}\tau_0} | 0 \rangle \longrightarrow \left(\frac{\omega}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\omega\tau_0}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} e^{-2\omega\tau_0} + \dots \right) \quad (2.32)$$

Possiamo riconoscere in questa formula lo stato di minima energia ($E_0 = \frac{\omega}{2}$) e $|\psi_0(0)|^2 = \left(\frac{\omega}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}}$; il livello successivo corrisponde a $n = 2$ mentre gli n dispari non contribuiscono essendo $\psi_{(2m+1)}(0) = 0$.

⁶cfr. con la (2.30).

⁷Segue dalla relazione $\pi y \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{y^2}{n^2} \right) = \sinh(\pi y)$ con $y = \frac{\omega\tau_0}{\pi}$.

2.2.2 Effetto tunnel in doppia buca di potenziale

Consideriamo un potenziale $V(x) = \lambda(x^2 - \eta^2)^2$, con η e λ fissati dalla relazione $8\lambda\eta^2 = \omega^2$ dove ω è la frequenza introdotta nell'esempio precedente.

In prossimità dei due minimi simmetrici siti in $\pm\eta$ il profilo del grafico sarà così analogo a quello studiato per l'oscillatore armonico.

La barriera che separa le due buche avrà altezza $\frac{\omega^4}{64\lambda}$.

Se avessimo una barriera infinita, il problema ritornerebbe ad essere quello già trattato dell'oscillatore armonico con la particella in una delle due buche, senza alcuna possibilità di transizione dall'una all'altra.

Entrambi gli stati sarebbero possibili ed il vuoto apparirebbe doppiamente degenerate.

Nel momento in cui la barriera ha invece un'altezza finita la simmetria del sistema per $x \leftrightarrow -x$ viene ripristinata, $\langle x \rangle_0$ viene ad essere esattamente zero e si ha uno splitting sulla degenerazione del fondamentale: tutto questo è spiegabile e deducibile tramite l'impianto che abbiamo fin qui costruito. Ripercorriamo la procedura standard. Con riferimento alla sottosezione precedente, troveremo le soluzioni $X(\tau)$ calcolando quelle del problema "fittizio" governato da $U(x) \equiv -V(x)$ riportato in figura 2.3.

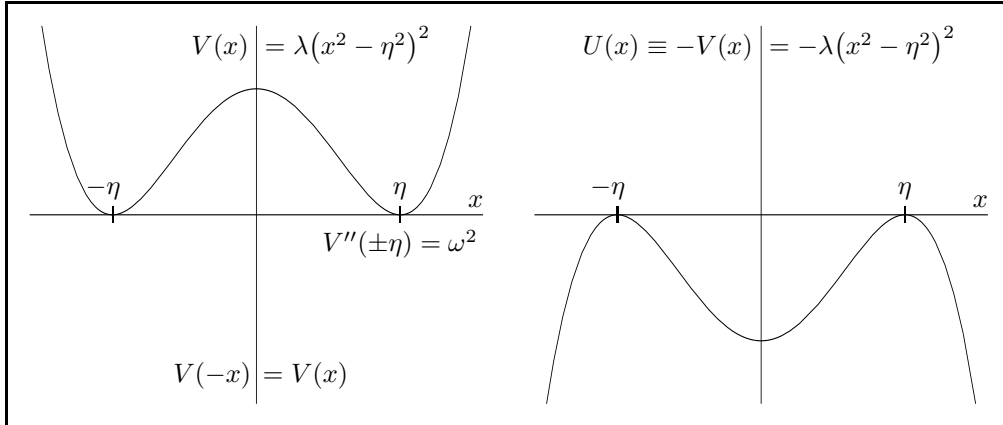


Figura 2.3: Rappresentazione grafica di $V(x)$ e $U(x)$ per la doppia buca di potenziale.

La ricerca di soluzioni classiche ad azione minima, ossia tali che $\ddot{X}(\tau) = U(X(\tau))$, ci permette di ottenere, qualora siamo interessati a $\langle \pm\eta | e^{-\hat{H}\tau_0} | \pm\eta \rangle$, le "vecchie" soluzioni $X(\tau) = \pm\eta$, $\forall \tau$.

In più, se studiamo $\langle \pm\eta | e^{-\hat{H}\tau_0} | \mp\eta \rangle$, ci imbattiamo in un'altra soluzione, denominata *istantone*⁸ (o *Antiistantone*, quando c'è il segno meno: in generale

⁸In realtà abbiamo fatto una piccola approssimazione.

pseudo-particella, d'ora in poi p.p.), che riportiamo in figura 2.4.

$$X(\tau) = \pm \eta \tanh \left[\frac{\omega(\tau - \tau_c)}{2} \right]. \quad (2.33)$$

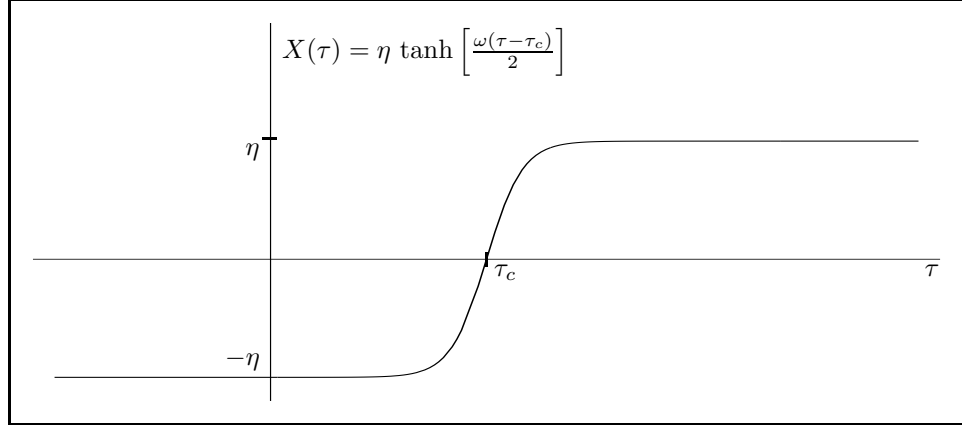


Figura 2.4: Grafico di un istantone

Si perviene facilmente alla (2.33) per quadratura da

$$\frac{1}{2} \left(\dot{X}(\tau) \right)^2 + U(X(\tau)) = E_0 = 0 \quad (2.34)$$

La costante τ_c , che chiameremo *centro dell'istantone*, proviene dalla costante di integrazione e non può essere determinata a priori; diverrà invece una variabile dinamica come vedremo in seguito.

Inserendo la $X(\tau)$ calcolata in $V''(X)$ nella (2.25) otteniamo l'equazione agli autovalori

$$-\frac{d^2}{d\tau^2} x_n(\tau) + \left(\omega^2 - \frac{3}{2} \omega^2 \frac{1}{\cosh^2 \left(\frac{\omega\tau}{2} \right)} \right) x_n(\tau) = \varepsilon_n x_n(\tau) \quad (2.35)$$

Dello spettro discreto degli autovalori che si ottengono imponendo le condizioni al bordo $x_n(\pm \frac{\tau_0}{2}) = 0$ solo due stati legati sopravviveranno dopo che facciamo il limite $\tau_0 \rightarrow \infty$: imponendo quest'ultima condizione otterremo infatti $\varepsilon_0 = 0$ e $\varepsilon_1 = \frac{3}{4}\omega^2$ mentre tutti gli altri autovalori passeranno nel continuo.

Occupiamoci in particolare di

$$\varepsilon_0 = 0 \quad x_0(\tau) = \sqrt{\frac{3\omega}{8}} \frac{1}{\cosh^2 \left(\frac{\omega\tau}{2} \right)} \quad (2.36)$$

Se l'energia del nostro sistema "fittizio" è minore di zero, si ottengono sì delle traiettorie con un τ_0 finito, ma che connettono i punti $(-\eta + \varepsilon, -\frac{\tau_0}{2})$ e $(\eta - \varepsilon, \frac{\tau_0}{2})$ con $\varepsilon = \varepsilon(E)$. Solo nel limite $\tau_0 \rightarrow \infty$ i cammini iniziano e finiscono in $-\eta$ e η rispettivamente.

La presenza di un modo zero non è una sorpresa, corrisponde infatti alla presenza di una direzione lungo la quale l'azione rimane invariata. Questa direzione è intuitivamente visibile ed è quella corrispondente alla traslazione del centro dell'istantone, infatti

$$\begin{aligned}
 S[X(\tau, \tau_c)] - S[X(\tau, \tau_c + \delta\tau_c)] &= S_0 - S_0 = 0 \\
 \text{con } S_0 &= \int \left[\frac{1}{2} \dot{X}^2(\tau) - U(X(\tau)) \right] d\tau = \\
 \text{per la (2.34)} \quad &= \int \dot{X}^2(\tau) d\tau = \frac{\omega^3}{12\lambda}
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Quindi ci aspettiamo $x_0(\tau) \propto \frac{\delta X}{\delta \tau_c}$. La corretta normalizzazione, per confronto tra la (2.36) e la (2.37), è

$$\begin{aligned}
 x_0(\tau) &= \sqrt{S_0} \left(-\frac{d}{d\tau_c} \right) X(\tau, \tau_c) \quad \text{o, analogamente,} \\
 x_0(\tau) &= \sqrt{S_0} \left(\frac{d}{d\tau} \right) X(\tau, \tau_c)
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Questa relazione non è fortuita ma diretta conseguenza dell'invarianza traslazionale di τ_c .

Il modo di eliminare la divergenza dall'integrale funzionale è proprio quello di non eseguire l'integrazione. Integrare su dc_0 , a parte un fattore di proporzionalità, è equivalente ad integrare su $d\tau_c$. È chiaro che una variazione di c_0 implica in $x(\tau)$

$$\Delta x(\tau) = x_0(\tau) \Delta c_0$$

D'altra parte una traslazione infinitesimo di τ_c produce un $\Delta x(\tau)$ pari a

$$\Delta x(\tau) = \Delta X(\tau) = \frac{dX}{d\tau_c} \Delta \tau_c = -\sqrt{S_0} \Delta \tau_c$$

Confrontando i moduli dei due incrementi otterremo

$$\frac{dc_0}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{S_0}{2\pi}} d\tau_c \tag{2.39}$$

Come risultato la (2.28) diviene ora

$$\langle \eta | e^{-\hat{H}\tau_0} | -\eta \rangle = e^{-S_0} \mathcal{N} \left[\det' \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(X) \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{S_0}{2\pi}} \int d\tau_c \tag{2.40}$$

o, più genericamente,

$$e^{-S_0} \mathcal{N} \left[\det' \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(X) \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{S_0}{2\pi} \right)^{\frac{N}{2}} \int \prod_i d\tau_i \quad (2.41)$$

dove con $\{\tau_i\}_i$ si sono indicate le N *coordinate collettive* di un generico sistema. *Questo risultato vale in generale e sarà riproposto nel nel trattamento della QCD.*

La (2.40) ci dice tra l'altro che la probabilità di transizione da $-\eta$ a η dovuta ad un istantone cresce linearmente con il tempo, ossia esiste ed è finita la densità di probabilità nell'unità di tempo di ottenere un istantone.

Riscriviamo questa quantità nella nuova forma:

$$\begin{aligned} G(-\eta, \eta, \tau_0) &\equiv \langle \eta | e^{-\hat{H}\tau_0} | -\eta \rangle = \\ &= e^{-S_0} \mathcal{N} \left[\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \left\{ \frac{\det \left[-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(X) \right]}{\det \left[-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right]} \right\}^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Abbiamo cioè fattorizzato il determinante già calcolato per l'oscillatore armonico. Indichiamo ora con “ $\det''$ ” il determinante scorporato dei due autovalori più piccoli. Avremo:

$$\begin{aligned} \textbf{Doppia buca di potenziale} \quad \det &\longrightarrow \sqrt{\frac{S_0}{2\pi}} \frac{3}{4} \omega^2 \det'' \int d\tau_c \\ \textbf{Oscillatore armonico} \quad \det &\longrightarrow \left(\omega^2 + \frac{\pi^2}{\tau_0^2} \right) \left(\omega^2 + \frac{4\pi^2}{\tau_0^2} \right) \det'' \\ &\longrightarrow \omega^4 \det'' \quad \text{per} \quad \tau_0 \longrightarrow \infty \end{aligned}$$

Inserendo il tutto nella (2.40)

$$\begin{aligned} G(-\eta, \eta, \tau_0) &= e^{-S_0} \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} e^{-\frac{\omega\tau_0}{2}} \sqrt{\frac{S_0}{2\pi}} \omega \left(\frac{3}{4} \Phi \right)^{-\frac{1}{2}} \int d\tau_c \\ \text{con} \quad \Phi &\equiv \det'' \left[-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(X) \right] / \det'' \left[-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right] \end{aligned} \quad (2.43)$$

Evitando ora di riportare i calcoli [9], non indispensabili alla nostra esposizione, inseriremo direttamente il risultato $\Phi = \frac{1}{12}$ che si ottiene una volta che si integri la sua espressione su tutti gli autovalori dello spettro continuo.

Come risultato:

$$\langle \eta | e^{-\hat{H}\tau_0} | -\eta \rangle = \left(\sqrt{\frac{\omega}{\pi}} e^{-\frac{\omega\tau_0}{2}} \right) \left(\sqrt{\frac{6}{\pi}} \sqrt{S_0} e^{-S_0} \right) \omega \int d\tau_c \quad (2.44)$$

Gas di istantoni

Il risultato (2.44) può essere ritenuto valido solo nella misura in cui il valore $\langle \eta | e^{-\hat{H}\tau_0} | -\eta \rangle$ sia piccolo. In caso contrario la possibilità di passare ad esempio da $-\eta$ a η tramite più istantoni diventa non trascurabile e dovremo pertanto tenerne conto. In figura 2.5 riportiamo un esempio di transizione $| -\eta \rangle \longrightarrow | \eta \rangle$ ad opera di tre p.p. di centri τ_1 , τ_2 e τ_3 .

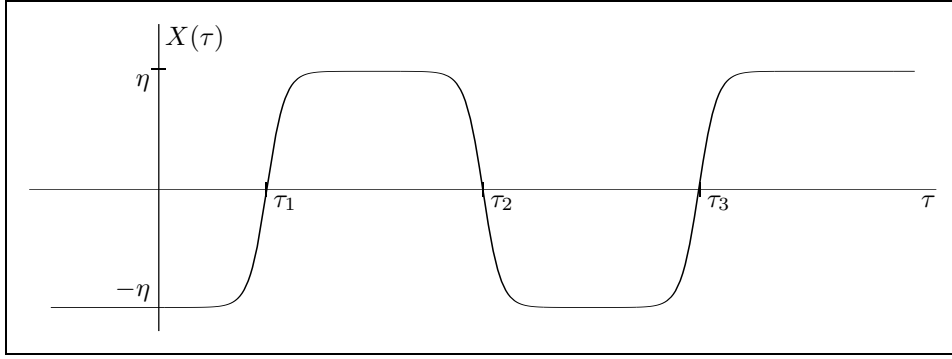


Figura 2.5: Transizione $| -\eta \rangle \longrightarrow | \eta \rangle$ ad opera di tre p.p.

Certo è che finché queste p.p. sono separate (diciamo $|\tau_1 - \tau_2| \gg \omega^{-1}$) potremo considerare la $X(\tau)$ come somma delle $X_i(\tau)$ di ognuno di essi. In particolare l'azione minima verrà ad essere nS_0 (se n sono le p.p.) e per le probabilità non avremo che da seguire le usuali regole combinatorie.

Diamo per scontata l'ipotesi di separazione temporale, riservandoci di verificarla a posteriori. La probabilità di transizione a n p.p. con centri $\{\tau_i\}_{i=1}^n$ e $-\frac{\tau_0}{2} < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n < \frac{\tau_0}{2}$ sarà data da

$$\begin{aligned}
 \langle \pm \eta | e^{-\hat{H}\tau_0} | -\eta \rangle &= \left(\begin{array}{ll} \text{per } n \text{ pari} & ; \quad |x_f\rangle = |-\eta\rangle \\ \text{per } n \text{ dispari} & ; \quad |x_f\rangle = |\eta\rangle \end{array} \right) \\
 &= \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} e^{-\frac{\omega\tau_0}{2}} d^n \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{\frac{\tau_0}{2}} \omega d\tau_n \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{\frac{\tau_0}{2}} \omega d\tau_{n-1} \dots \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{\frac{\tau_0}{2}} \omega d\tau_1 \\
 &= \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} e^{-\frac{\omega\tau_0}{2}} d^n \frac{(\omega\tau_0)^n}{n!} \quad (\text{il fattoriale viene dal prodotto T-ordinato}) \\
 \text{con } d &= \sqrt{\frac{6}{\pi}} \sqrt{S_0} e^{-S_0}
 \end{aligned}$$

Finalmente, sommando su tutti i possibili n , possiamo ottenere la probabilità

di transizione desiderata:

$$\begin{aligned}\langle +\eta | e^{-\hat{H}\tau_0} | -\eta \rangle &= \sum_{n \text{ dispari}} \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} e^{-\frac{\omega\tau_0}{2}} \frac{(\omega\tau_0 d)^n}{n!} = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} e^{-\frac{\omega\tau_0}{2}} \sinh(\omega\tau_0 d) \\ \langle -\eta | e^{-\hat{H}\tau_0} | -\eta \rangle &= \sum_{n \text{ pari}} \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} e^{-\frac{\omega\tau_0}{2}} \frac{(\omega\tau_0 d)^n}{n!} = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} e^{-\frac{\omega\tau_0}{2}} \cosh(\omega\tau_0 d)\end{aligned}$$

Sviluppando queste due relazioni nel limite $\tau_0 \rightarrow \infty$ e diagonalizzando la matrice $e^{-\hat{H}\tau_0}$ possiamo ricavare gli autovalori più bassi dell'energia, rispettivamente:

$$\begin{aligned}E_0 &= \frac{\omega}{2} - \sqrt{\frac{2\omega^3}{\pi\lambda}} e^{-\frac{\omega^3}{12\lambda}} \frac{\omega}{2} \\ E_1 &= \frac{\omega}{2} + \sqrt{\frac{2\omega^3}{\pi\lambda}} e^{-\frac{\omega^3}{12\lambda}} \frac{\omega}{2}\end{aligned}$$

Rimane solo da chiarire l'ipotesi di separazione temporale tra le p.p. o almeno trovarne un dominio di validità.

La successione $\frac{x^n}{n!}$ è crescente fino circa $n \simeq x$ dopodiché decresce. I termini con $n \gg x$ (nel nostro caso $n \gg d\omega\tau_0$) sono ininfluenti. Cioè contribuiranno alle ampiezze di interesse solo quelle configurazioni con un numero esiguo di p.p., il cui estremo superiore è fissato da $(d\omega\tau_0)$. A sua volta $d \rightarrow 0$ come $e^{-\omega^3/12\lambda}$, per $\lambda \rightarrow 0$.

Possiamo quindi usare λ per costruirci il potenziale adeguato, o meglio usarlo come parametro libero per trovare un regime di validità della teoria fin qui sviluppata.

Sfortunatamente nella QCD non abbiamo questa chance e dovremo confrontarci direttamente con la fenomenologia adronica per sapere se i nostri istantoni sono abbastanza "diluuti".

2.2.3 Descrizione del calcolo in $SU(N)$

Quello che ci apprestiamo a fare per il vuoto quantistico ricalca passo passo, dal punto di vista procedurale, quanto fin qui sviluppato nel modello unidimensionale.

Occupiamoci della transizione

$$\langle n+1 | e^{-\hat{H}\tau_0} | n \rangle = \langle 1 | e^{-\hat{H}\tau_0} | 0 \rangle \quad (\text{poiché } [H, \Omega] = 0)$$

Sviluppiamo i campi di gauge intorno alla soluzione istantonica $A_\mu \equiv A_\mu^{\text{cl}} + a_\mu$, con A_μ^{cl} che indica il campo dell'istantone ed a_μ le fluttuazioni attorno ad esso.

Per l'azione avremo:

$$\begin{aligned} S(A_\mu) &= S_0 + \frac{1}{2} \int d^4x a_\mu^a L_{\mu\nu}^{ab} a_\nu^b = \\ &= \frac{8\pi^2}{g^2} + \frac{1}{2} \int d^4x a_\mu^a [D^2 a_\mu^a - D_\mu D_\nu a_\nu^a - 2g f^{abc} G_{\mu\nu}^b a_\nu^c]. \end{aligned}$$

L'invarianza di gauge fa sì che per ogni $a_\mu^a(x) = \left(D_\mu [A_\mu^{\text{cl}}(x)] \tilde{\lambda}(x) \right)^a$ l'operatore $L_{\mu\nu}^{ab}$ dia esattamente zero. Possiamo rimuovere questa degenerazione aggiungendo alla lagrangiana un termine $\Delta\mathcal{L} = (D_\mu a_\mu^a)^2$ e, conseguentemente, inserendo i campi *ghost* di Faddeev–Popov (Φ e $\bar{\Phi}$, campi complessi anticommutanti o variabili di Grassmann).

L'inserimento dei ghost produrrà un altro termine nell'azione

$$\Delta S_{\text{gh}} = \int d^4x \bar{\Phi}^a D^2 \Phi^a \equiv \int d^4x \mathcal{L}_{\text{gh}}^{ab}$$

Come risultato

$$\langle 1 | e^{-\hat{H}\tau_0} | 0 \rangle = \mathcal{N} [\det(\mathcal{L} + \Delta\mathcal{L})]^{-\frac{1}{2}} [\det(\mathcal{L}_{\text{gh}})] e^{-S_0}$$

(il determinante di $\mathcal{L}_{\text{gh}}$ compare con potenza positiva, così come ad esempio succede con i campi di materia ψ e $\bar{\psi}$, come conseguenza delle regole di integrazione delle variabili di Grassmann).

Il calcolo del determinante comporta il solito problema delle divergenze infra-rosse (ossia i modi zero, con i quali seguiremo ancora una volta la strategia di passare alle variabili collettive) nonché divergenze ultraviolette, problema quest'ultimo affrontabile mediante rinormalizzazione.

Integrazione dei modi zero

Trasformiamo dunque l'integrale sui $4N_c$ modi zero in integrale sulle coordinate collettive. Ognuna di loro porterà un fattore $\sqrt{S_0}$ cosicché

$$dn_I \equiv \frac{\langle 1 | e^{-\hat{H}\tau_0} | 0 \rangle_{1 \text{ ist.}}}{\langle 0 | e^{-\hat{H}\tau_0} | 0 \rangle_{\text{no p.p.}}} \propto \left(\frac{8\pi^2}{g^2} \right)^{2N_c} e^{-\left(\frac{8\pi^2}{g^2}\right)} \frac{1}{\rho^5} d\rho d^4x. \quad (2.45)$$

- La quinta potenza di ρ a denominatore può essere giustificata dall'analisi dimensionale;
- Le variabili di integrazione non sono tutte le $4N_c$ coordinate collettive, infatti le $4N_c - 5$ variabili angolari danno un'integrazione compatta che porta come contributo semplicemente una costante moltiplicativa.

Integrazione dei modi positivi

Per prima cosa dobbiamo regolarizzare la teoria: seguiremo lo schema di Pauli–Villar. I determinanti in analisi saranno calcolati in un rapporto così composto [22, 9, 23]

$$\det(O) \longrightarrow \frac{\det(O)}{\det(O + M^2)} \quad \text{dove } M \text{ è il regolatore.}$$

Indicheremo con g_0 il valore di $g(M)$. L'avere regolarizzato comporta tra l'altro la comparsa di un fattore M^{4N_c} quando si integrano i modi zero.

La (2.45) può essere ora così scritta:

$$dn_I = \mathcal{N} \int \frac{d\rho d^4x}{\rho^5} \left(\frac{8\pi^2}{g^2} \right)^{2N_c} \exp \left(-\frac{8\pi^2}{g^2} + 4N_c \ln(M\rho) - \Phi_1 \right) . \quad (2.46)$$

dove abbiamo indicato con Φ_1 il contributo dei modi a frequenza positiva. A parte le quinta potenza di ρ che rende adimensionale l'azione, ogni altra occorrenza di ρ ed M (e quindi nel fattore che abbiamo appena detto emergere dalle coordinate collettive, o nell'argomento di Φ_1) sarà nella forma adimensionale $(M\rho)$. Nel limite $M\rho \gg 1$, $\Phi_1(M\rho)$ può essere calcolato mediante l'uso del calcolo perturbativo.

Risultato ordine un loop

A un loop $\Phi_1(M\rho)$ è dato da [22, 9, 23]

$$\Phi_1(M\rho) = \frac{N_c}{3} \frac{g^2}{8\pi^2} \ln(M\rho) S_0 = \frac{N_c}{3} \ln(M\rho)$$

e quindi la (2.46) diviene

$$dn_I = \mathcal{N} \int \frac{d\rho d^4x}{\rho^5} \left(\frac{8\pi^2}{g_0^2} \right)^{2N_c} \exp \left(-\frac{8\pi^2}{g_0^2} + \frac{11}{3} N_c \ln(M\rho) \right) \quad (2.47)$$

$$= \mathcal{N} \int \frac{d\rho d^4x}{\rho^5} \left(\frac{8\pi^2}{g_0^2} \right)^{2N_c} \exp \left(-\frac{8\pi^2}{g_1^2(\rho)} \right) . \quad (2.48)$$

$$\text{con } \frac{8\pi^2}{g_1^2(\rho)} = \frac{8\pi^2}{g_0^2} - \frac{11}{3} N_c \ln(M\rho) \quad (2.49)$$

Notiamo, nella formula appena calcolata, la persistenza di un fattore dove g_0 rimane inalterato (mentre nell'esponentiale $g_0 \longrightarrow g(\rho)$).

Questa dissimmetria viene eliminata facendo il calcolo a due loops.

Calcolo a due loops

Il risultato che riportiamo qui di seguito [24, 25] (nello schema Pauli–Villar) può essere ottenuto modificando leggermente il calcolo effettuato da 't Hooft nei suoi lavori pionieristici [22].

$$dn_I = \int \frac{d\rho d^4x}{\rho^5} d(\rho) \quad (2.50)$$

$$\text{dove} \quad d(\rho) \equiv \frac{C_1}{(N_c - 1)! (N_c - 2)!} \left[\frac{8\pi^2}{g_1^2(\rho)} \right]^{2N_c} e^{-\frac{8\pi^2}{g_2^2(\rho)} - C_2 N_c} \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} \frac{8\pi^2}{g_1^2(\rho)} &= \frac{8\pi^2}{g_0^2} - \frac{11}{3} N_c \ln(M\rho) \\ \frac{8\pi^2}{g_2^2(\rho)} &= \frac{8\pi^2}{g_0^2} + N_c \left[-\frac{11}{3} \ln(M\rho) + \frac{17}{11} \ln \left(1 - \frac{11}{3} N_c \frac{g_0^2}{8\pi^2} \ln(M\rho) \right) \right] \\ C_1 &= \frac{2 e^{\frac{5}{6}}}{\pi^2} = 0.466 \, 275 \, 201 \, 595 \dots \\ C_2 &= \frac{5}{3} \ln 2 - \frac{17}{36} + \frac{1}{3} (\ln(2\pi) + \gamma_E) + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} \\ &= \frac{5}{3} \ln 2 - \frac{5}{36} - 4 \zeta'(-1)^9 = 1.678 \, 040 \, 986 \, 846 \dots \\ \gamma_E &= \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \ln N \right) = 0.577 \, 215 \, 664 \, 902 \dots \end{aligned} \quad (2.52)$$

Abbiamo indicato con g_1 e g_2 la costante di accoppiamento running calcolata rispettivamente ad uno ed a due loops. È possibile compattare un po' di più la (2.51) scrivendo la dipendenza esplicita da ρ (e da $\rho_0 \equiv \frac{1}{M}$)

$$\begin{aligned} d(\rho) &\equiv \frac{C_1}{(N_c - 1)! (N_c - 2)!} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{11}{3} N_c} \times \\ &\times \left[1 - \frac{11}{3} N_c \frac{g_0^2}{8\pi^2} \ln \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) \right]^{\frac{5}{11} N_c} \left(\frac{8\pi^2}{g_0^2} \right)^{2N_c} e^{-\frac{8\pi^2}{g_0^2} - C_2 N_c} \end{aligned} \quad (2.53)$$

In particolare è evidente che per piccoli ρ

$$\frac{dn_I}{d^4x} \sim \frac{d\rho}{\rho^5} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^b \quad \left(b = \frac{11}{3} N_c \stackrel{SU(3)}{=} 11 \right) \quad (2.54)$$

⁹Abbiamo qui indicato con $\zeta(s)$ la funzione trascendente Zeta di Riemann definita, per $s > 1$, come $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ (e quindi $\zeta'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln n \, n^{-s}$). Per $s \in \mathbb{C} \setminus \{(1, 0)\}$ esiste il prolungamento analitico della $\zeta(s)$ ed è a questo che ci riferiamo nel testo; in particolare $\zeta'(-1) = \frac{1}{12} - \frac{1}{12} (\ln(2\pi) + \gamma_E) + \frac{1}{2\pi^2} \zeta'(2)$.

ossia istantoni di piccolo size vengono molto soppressi.

Per grandi ρ invece la (2.53) porta ad una divergenza.

Di fatto questo non si può dire perché andare oltre la scala ρ_0 ci porta ad uscire fuori dal regime di validità dello sviluppo perturbativo del quale ci siamo serviti per derivare la (2.54)

2.2.4 Validità della $d(\rho)$

Così come nel caso del modello unidimensionale la densità alla quale siamo pervenuti non tiene conto di configurazioni diverse da quelle di singola pseudoparticella.

Quello che andrebbe fatto sarebbe di includere tutti i punti sella nella S_0 , mentre nella pratica si fa un “quasi punto sella” comprendendo nell’azione solo le configurazioni di singoli istantoni non interagenti (gas diluito di istantoni).

L’azione non comprende ad esempio configurazioni di più p.p., né configurazioni (diverse dall’istantone BPST) che permettano $\Delta n_W = 2$ o più.

Per quanto riguarda le configurazioni multi-istantoniche avremo ancora una volta che l’ipotesi di gas diluito, nel range di parametri dove è applicabile, ci permette di sommare configurazioni di singole p.p.. Il problema è che in QCD non abbiamo parametri da variare (ossia non abbiamo, come nel caso unidimensionale, un parametro λ , per cui possiamo dire che la teoria è valida allorché λ diventa molto piccolo). La QCD ha tutti i suoi parametri fissati e la nostra trattazione sarebbe perfettamente legittima solo se la natura favorisse i piccoli size ma non sembra essere questo il caso. Nel momento in cui i size diventano grandi non è chiaro il profilo che assumono tali configurazioni, ovvero la forma esplicita dei campi di gauge. Un modo equivalente di esprimere questa nostra ignoranza è quello di dire che non sappiamo come definire l’interazione. Infatti, supponendo ad esempio di passare dal caso di due p.p. entrambe di raggio molto piccolo rispetto alla loro distanza ($S = 2 \times S_0 = \frac{16\pi^2}{g^2(\rho)}$) all’analogo caso ma con raggi più grandi ($\tilde{\rho}$), si può pensare di scrivere i campi di gauge come funzione di quelli delle singole p.p. (ad esempio $A_{\text{glob.}}^\mu(x) = A_{1\text{p.p.}}^\mu(x) + A_{2\text{p.p.}}^\mu(x)$, quella che viene indicata come “*sum ansatz*”).

Certo è che l’azione non avrà più il valore $S(\tilde{\rho}) = 2 \times \frac{8\pi^2}{g^2(\tilde{\rho})}$

Possiamo allora definire azione di interazione proprio quella parte di $S(\tilde{\rho})$ non dovuta alle configurazioni originarie, ossia [26]

$$S_I(\tilde{\rho}) \equiv S(\tilde{\rho}) - 2 \times \frac{8\pi^2}{g^2(\tilde{\rho})} \quad (2.55)$$

Il fattore e^{-S_I} porterà negli integrali funzionali una profonda depressione in corrispondenza alle configurazioni contenenti p.p. fortemente interagenti. Di

conseguenza avremo una rapida discesa della $d(\rho)$ per $\rho \rightarrow \infty$. Nel corso degli anni molti sono stati i tentativi di previsione dell'esatto andamento della $d(\rho)$ a grandi size, ma prima di addentrarci in questo argomento, che rimandiamo al prossimo capitolo, descriveremo alcune grandezze della QCD che interverranno più fenomenologicamente nella parametrizzazione di funzioni di densità.

Condensati gluonico e chirale

Una delle sopracitate grandezze è il *condensato gluonico*, ossia il VEV del termine cinetico gluonico della lagrangiana della QCD.

Dovuto ad effetti puramente non perturbativi (e quindi gli istantoni giocano un ruolo molto importante) il VEV in questione viene ad essere diverso da zero (mentre non è definito secondo l'ordinaria teoria delle perturbazioni).

Una valutazione ottenuta mediante le regole di somma di Shifman–Vainshtein–Zakharov da il seguente risultato [27]

$$\langle 0 | \frac{\alpha_s}{\pi} : G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a : | 0 \rangle = 0.012 \text{ (Gev)}^4 \quad (2.56)$$

indipendente dalla scala di impulso oltre una certa soglia ($\mu \sim 1 \text{ GeV}$).

Sotto l'ipotesi di quarks a massa nulla la lagrangiana della QCD possiede una simmetria $SU(3)_V \otimes SU(3)_A \otimes U(1)_V \otimes U(1)_A$; analizzeremo in particolare i 2 gruppi assiali. Se consideriamo i flavours u , d ed s ed indichiamo in una notazione più compatta

$$\psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_u \\ \psi_d \\ \psi_s \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

possiamo scrivere le invarianze sopra citate come

$$\psi \longrightarrow e^{-i\theta\gamma^5}\psi \quad \left(\bar{\psi} \longrightarrow \bar{\psi} e^{-i\theta\gamma^5} \right) \quad \text{per } U(1)_A \quad (2.58)$$

$$\psi \longrightarrow e^{-i\gamma^5 T^a \theta^a} \psi \quad \left(\bar{\psi} \longrightarrow \bar{\psi} e^{-i\gamma^5 T^a \theta^a} \right) \quad \text{per } SU(3)_A \quad (2.59)$$

dove $\{T^a\}_{a=1\dots 8}$ sono i generatori del gruppo di flavour nella rappresentazione fondamentale.

La simmetria $SU(3)_A$ si rompe spontaneamente secondo il meccanismo di Goldstone, essendo il vuoto non invariante sotto le trasformazioni del gruppo, ed il parametro d'ordine di tale rottura è il cosiddetto *condensato chirale* [28].

$$\langle 0 | : \bar{\psi}\psi : | 0 \rangle = -1.3 \cdot 10^{-2} \text{ (Gev)}^3 \quad (2.60)$$

(dalla (2.59) segue che $\langle 0 | : \bar{\psi} \psi : | 0 \rangle = 0$ per un vuoto invariante sotto $SU(3)_A$). Gli otto bosoni di Goldstone attesi possono essere identificati nell'ottetto di mesoni pseudoscalari ($\pi^\pm, \pi^0, K^\pm, K^0, \bar{K}^0, \eta$) che sono però massivi a causa della non nullità della massa dei quarks (il fatto che $m_u \sim m_d \ll m_s$ evidenzia un $SU(2)_A$, quello di u e d appunto, al quale corrispondono tre bosoni di Goldstone ($\pi^\pm, \pi^0$) di massa inferiore agli altri cinque). Allo stato attuale il meccanismo dinamico attraverso il quale si realizza la rottura di simmetria chirale non è ancora ben compreso, ma è noto che si tratta di fenomeni in cui le p.p. sono coinvolte.

Per quello che riguarda la simmetria $U(1)_A$ sappiamo che non è una simmetria alla Wigner: qualora lo fosse, nel limite chirale, ad ogni adrone verrebbe a corrispondere un partner di parità opposta e questo non è il caso in natura. D'altra parte non è neanche una simmetria rotta alla Goldstone, perchè in tal caso calcoli in teoria delle perturbazioni chirale (ovvero nei quali si considerano i termini con massa non nulla dei quarks come una perturbazione rispetto alla lagrangiana scritta nel limite chirale) danno una stima per la massa del bosone di Goldstone [29] $m_\phi < \sqrt{3} m_\pi$ mentre l'unico candidato possibile, la particella η' , risulta avere massa $m_{\eta'} \sim 1$ GeV. La spiegazione del "problema $U(1)_A$ " è semplicemente che quella che appare come una simmetria a livello classico viene rotta in modo anomalo a livello quantistico.

Gli istantoni danno un contributo determinante alla massa della η' .

Capitolo 3

Studio del modello di Diakonov

3.1 Insiemi di pseudoparticelle

3.1.1 Il liquido di istantoni

Prima di sperimentare eventuali correzioni alla $d(\rho)$ trovata cercheremo di estrarre da essa delle stime da confrontare con la realtà.

Integrando la (2.19) si ottiene $\int d^4x G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a = 32\pi^2$.

Se immaginiamo il condensato istantonico tutto dovuto ad istantoni non interagenti, possiamo trovare un limite superiore alla densità delle p.p.. In tal maniera, dalla (2.56) si ricava:

$$\frac{dn_{\text{p.p.}}}{d^4x} \leq \frac{\langle 0 | : G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a : | 0 \rangle}{32\pi^2} \sim 1 \text{ fm}^{-4} \quad (3.1)$$

Un'altra stima è fornita dalla relazione di Witten–Veneziano [30, 31], riportata qui di seguito, che utilizza la *suscettività topologica* χ_{top} della teoria senza quarks.

$$\chi_{\text{top}} \equiv \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{\langle Q^2 \rangle}{V} = \frac{f_\pi^2}{2N_f} (m_\eta^2 + m_{\eta'}^2 - 2m_K^2) = (180 \text{ Mev})^4 \quad (3.2)$$

Sotto ipotesi ragionevoli è possibile estrarre la densità delle p.p. dalla (3.2).

Chiamiamo n_I il numero di istantoni ed n_A quello di antiistantoni.

Ovviamente $Q = n_I - n_A$ e $n_{\text{p.p.}} \equiv n_I + n_A$.

Supponiamo che i numeri ora introdotti siano tutte variabili poissoniane. In particolare, per tali distribuzioni, $\sigma^2 = \mu$ ($\mu \equiv \langle n \rangle$) quindi, essendo $\sigma^2 \equiv \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$, si ha che

$$\langle n^2 \rangle = \langle n \rangle^2 + \langle n \rangle. \quad (3.3)$$

Sotto l'ipotesi $\langle Q \rangle = 0$ si ottiene $\langle n_I \rangle = \langle n_A \rangle$. Definiamo allora

$$\langle n_{IA} \rangle \equiv \langle n_I \rangle = \langle n_A \rangle.$$

Dunque

$$\langle Q^2 \rangle = \langle (n_I - n_A)^2 \rangle = \langle n_I^2 \rangle + \langle n_A^2 \rangle - 2\langle n_I \rangle \langle n_A \rangle$$

che tramite la (3.3) diviene

$$\begin{aligned} \langle Q^2 \rangle &= \langle n_I \rangle^2 + \langle n_I \rangle + \langle n_A \rangle^2 + \langle n_A \rangle - 2\langle n_I \rangle \langle n_A \rangle = \\ &= \langle n_{IA} \rangle^2 + \langle n_{IA} \rangle + \langle n_{IA} \rangle^2 + \langle n_{IA} \rangle - 2\langle n_{IA} \rangle \langle n_{IA} \rangle = \\ &= 2\langle n_{IA} \rangle = \langle n_{p.p.} \rangle \end{aligned}$$

da cui

$$\chi_{\text{top}} \equiv \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{\langle Q^2 \rangle}{V} = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{\langle n_{p.p.} \rangle}{V} = \frac{dn_{p.p.}}{d^4x}$$

quindi, confrontando con la (3.2)

$$\frac{dn_{p.p.}}{d^4x} \sim 1 \text{ fm}^{-4} \quad (3.4)$$

Queste stime che abbiamo fatto sono sicuramente grossolane. Simulazioni su reticolo danno però risultati non dissimili.

Dopo la densità media il parametro che più caratterizza un insieme di istantoni è il raggio caratteristico delle p.p.. Un primo tentativo di valutazione di questa grandezza [32] è stato quello di cercare il ρ_{max} per il quale

$$\int_0^{\rho_{\text{max}}} d\rho n_0(\rho) = n_{\text{phen}} = 1 \text{ fm}^{-4} \quad (3.5)$$

con $n_0(\rho) \equiv \frac{d(\rho)}{\rho^5}$ ($d(\rho)$ è quella definita nella (2.50))

Il risultato è $\rho_{\max} \sim 1$ fm. Di fatto la presenza di istantoni così grandi (rapportati alla separazione media dell'ordine del fermi) rende impossibile pensare singole p.p. non interagenti, presupposto con il quale la $n_0(\rho)$ è stata ricavata. Un argomento più raffinato consiste nel mettere in interazione l'istantone con un campo esterno ($G_{\mu\nu}^{a \text{ ext}}$) mediante la seguente azione di interazione [21]

$$S_I = \frac{2\pi^2\rho^2}{g^2} \bar{\eta}_{a\mu\nu} U^{ab} G_{\mu\nu}^{b \text{ ext}} \quad (3.6)$$

(U^{ab} è una matrice del gruppo di colore che esprime l'orientazione relativa tra $G_{\mu\nu}^{b \text{ ext}}$ e la p.p.). Al primo ordine non si hanno contributi alla $n_0(\rho)$ essendo l'interazione un'interazione di dipolo, mentre al secondo ordine si ottiene

$$n(\rho) = n_0(\rho) \left[1 + \frac{\pi^4\rho^4}{2g^2} \left\langle (G_{\mu\nu}^{a \text{ ext}})^2 \right\rangle + \dots \right] \quad (3.7)$$

A questo punto è facile identificare $\langle (G_{\mu\nu}^{b \text{ ext}})^2 \rangle$ della (3.7) con il condensato gluonico: questa interazione inizia a diventare non trascurabile per un $\bar{\rho} \sim 0.2$ fm e porta ad una maggiore crescita della $n(\rho)$ rispetto alla $n_0(\rho)$ finora calcolata.

Shuryak, esponenzializzando la (3.7) (inserendo così effetti di ordine superiori al secondo) propose [33] di usare ancora una volta la (3.5), ma con una nuova $n(\rho)$ al posto di $n_0(\rho)$, definita appunto da

$$\int_0^{\rho_{\max}} d\rho n_0(\rho) \exp \left[\frac{\pi^4\rho^4}{2g^2} \langle 0 | : G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a : | 0 \rangle \right] = n_{\text{phen}} \quad (3.8)$$

Il $\rho_{\max}$ che ne viene è questa volta dell'ordine di $\frac{1}{3}$ fm. Questo valore, per come determinato, sotto molte ipotesi e con grosse semplificazioni, non avrebbe altra pretesa se non quella di offrire un'indicazione. Pur tuttavia i calcoli su reticolo hanno anche in questo caso confermato il valore stimato collocando il size medio delle p.p. in un range

$$\bar{\rho} = (0.30 \div 0.40) \text{ fm} \quad (3.9)$$

I valori finora riportati ci permettono di fare delle valutazioni su ciò che fin qui abbiamo considerato un "gas di istantoni"

- Il vuoto della QCD appare molto diluito, il rapporto tra volume degli istantoni sul totale viene dell'ordine di $\frac{1}{20}$ ed è solo dentro le p.p. che si concentrano le grandi intensità dei campi;
- il campo dell'istantone è molto intenso, $G_{\mu\nu} \gg \Lambda_{QCD}$, quindi l'azione viene molto alta ($S_0 \sim 10 \div 15 \gg 1$) e gli sviluppi quadratici intorno ad S_0 sono legittimi;

- $|\delta S_{\text{int}}|$ (almeno quella calcolata con la formula di dipolo (3.6) che è applicabile anche tra p.p., considerando il campo di una come campo esterno dall'altra) viene quasi di un ordine sotto rispetto ad S_0 .
 $|\delta S_{\text{int}}| \sim (2 \div 3) \ll S_0$ e quindi l'interazione non snatura completamente le configurazioni di singole p.p., ossia non distrugge gli istantoni;
- $e^{|\delta S_{\text{int}}|} \sim 20 \gg 1$ e questo implica che l'interazione non può essere trascurata in un qualsiasi modello che indagli sulla natura di queste p.p..

In conclusione ciò che era stato proposto inizialmente come un “gas di istantoni” appare piuttosto come un “liquido” ed in questo senso i modelli numerici (tra i quali quello che studieremo in dettaglio) sono detti modelli a “liquido di istantoni”.

3.1.2 L'insieme di Diakonov

La procedura di costruzione dell'insieme di Diakonov* [34] è quella di racchiudere in un box a quattro dimensioni un numero desiderato di istantoni e di antiistantoni. Note le coordinate collettive sarà immediata la costruzione dei campi di gauge di ogni singola p.p. e quindi, scelta l'ipotesi di composizione dei medesimi, potremo costruire i campi di gauge totali. Anticipiamo fin d'ora che ci serviremo della “sum ansatz” di cui abbiamo già parlato e considereremo dunque gli $A_\mu^a(x)$ come somma di quelli di ogni singola p.p.. Riportiamo qui di seguito i parametri da cui il modello dipende elencandoli tutti, anche se eventualmente correlati tra loro (vedremo poi in che modo), per presentare la notazione utile nel resto del capitolo:

$\mathbf{N}_c$, Numero di colori della teoria, abbiamo analizzato casi con $N_c \in \{2, 3\}$;

$\mathbf{n}_{\mathbf{IA}}$, densità media delle pseudoparticelle, ovverosia ciò che finora abbiamo indicato con $\frac{dn_{IA}}{d^4x}$;

$\langle \mathbf{d} \rangle$, distanza media tra le p.p.;

ρ_0 , size in corrispondenza al quale la funzione di densità $d(\rho)$ (descritta in appendice B) presenta un massimo;

α , esponente che determina l'andamento asintotico della $d(x)$ per $x \rightarrow \infty$: sono stati presi in considerazione $\alpha \in \{3, 5\}$;

*Si ringrazia il prof. Diakonov per aver messo a disposizione il materiale trattato in questo capitolo.

L_s , lato spaziale del box in cui metteremo le p.p.. Abbiamo deciso di utilizzare, nella fase di analisi dati, dei reticoli che avessero una dimensione maggiore (ad esempio quella temporale) delle altre tre uguali tra loro. Il reticolo sarà costruito a partire dall'insieme che descriveremo in questa sezione, in particolare sarà estratto da una piccola porzione interna al box; è pertanto importante che sia centrato nel box affinché si abbia isotropia spaziale ed è anche importante che box e reticolo abbiano la stessa forma per far sì che dai punti del reticolo non si vedano asimmetrie della densità istantonica in diverse direzioni spazio temporali;

L_t , lato temporale del box, quello più lungo;

γ , rapporto tra lato temporale e lato spaziale;

V , volume del box;

n_I , numero di istantoni;

n_A , numero di antiistantoni;

$n_{p.p.}$, numero totale di pseudoparticelle.

Le relazioni tra questi parametri sono le seguenti:

$$n_{p.p.} = n_I + n_A \quad (3.10)$$

$$L_t = \gamma L_s \quad (3.11)$$

$$V = \gamma L_s^4 \quad (3.12)$$

$$n_{p.p.} = V n_{IA} \quad (3.13)$$

$$V = n_{p.p.} \langle d \rangle^4 \quad (\text{ossia} \quad \langle d \rangle^4 n_{IA} = 1) \quad (3.14)$$

L'idea di base del modello è quella di mettere posizioni (ovviamente all'interno del box) ed orientazioni di colore in modo assolutamente casuale.

Rimandiamo per il momento il problema della determinazione dei size $\{\rho^{(j)}\}_{j=1, n_{p.p.}}$ da attribuire ad ogni p.p..

Per quanto riguarda la posizione non avremo che da generare numeri random $\{x_i^{(j)}\}_{j=1, n_{p.p.}} \in [-\frac{L_s}{2}, \frac{L_s}{2}]$ e $\{x_4^{(j)}\}_{j=1, n_{p.p.}} \in [-\frac{L_t}{2}, \frac{L_t}{2}]$ mentre per l'orientazione avremo bisogno di $n_{p.p.}$ matrici $\{U^{(j)}\}_{j=1, n_{p.p.}} \in SU(N_c)$ (una per ogni p.p.) con le quali ruotare gli istantoni (o anti-) dalla loro forma standard (2.20) (forma intesa nell'algebra di $SU(2)$ o in un sottogruppo $SU(2)$ di $SU(N_c)$; per

l'antiistantone stessa procedura ma con $\eta \leftrightarrow \bar{\eta}$) come qui sotto riportato:

$$A_\mu^{(j)}(x) \rightarrow U^{(j)} A_\mu^{(j)}(x) U^{(j)\dagger} \quad (3.15)$$

$$\text{dove } A_\mu^{a(j)}(x) = 2 \frac{(x_\nu - x_\nu^{(j)})}{(x - x^{(j)})^2} \frac{\bar{\eta}_{a\mu\nu} \rho^{(j)2}}{(x - x^{(j)})^2 + \rho^{(j)2}} \quad (3.16)$$

η è definito in appendice A.

Dire che l'orientazione della p.p. deve essere random equivale a dire che le $\{U^{(j)}\}$ devono essere scelte con la misura di Haar del gruppo: la procedura verrà descritta nella successiva sezione 3.1.3, per il momento basterà dire che allo scopo di ottenere una matrice $U^{(j)}$ dobbiamo produrre, per ogni j , 3×10 quadriversori $\{v_i^{(jl)}\}_{i=1,4}^{l=1,30}$ (questo per $SU(3)$, per $SU(2)$ invece ne è sufficiente uno). Per produrre un quadriversore v_i seguiamo la seguente procedura:

1. si generano 4 numeri casuali $\{\nu_i\}_{i=1,4}$ con $\nu_i \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$
2. si calcola $\nu = \sqrt{\nu_i \nu_i}$
3. se $\nu \leq \frac{1}{2}$ definiamo $v_i \equiv \frac{\nu_i}{\nu}$. Così facendo abbiamo proiettato uno tra gli infiniti punti interni ad una sfera sulla superficie della stessa; la simmetria sotto rotazioni assicura la completa uniformità di questa distribuzione.
4. qualora invece $\nu > \frac{1}{2}$, siamo costretti a rigettare ν_i e tornare al punto 1. Se infatti accettassimo tali valori, ossia accettassimo tutti i $\{\nu_i\}$, indipendentemente da fuori o dentro la sfera di raggio $\frac{1}{2}$, non avremmo fatto altro che proiettare l'interno di un cubo su di una superficie sferica. La densità di probabilità sarebbe ben maggiore per quei versori che puntano in direzione dei vertici del cubo.

Rimangono ora da calcolare i size $\{\rho^{(j)}\}_{j=1, n_{p.p.}}$. In Appendice B abbiamo riportato le proprietà e caratteristiche della funzione densità di probabilità $d(\rho)$ utilizzata da Diakonov [34]. Questa funzione utilizza una grandezza adimensionale $x = \frac{\rho}{\rho_1}$ dove ρ_1 è una variabile relazionabile a ρ_0 . In particolare sappiamo scrivere l'integrale della $d(x)$, ossia la funzione $D(x)$ e la sua inversa.

Riportiamo per chiarezza tutte le quantità che abbiamo qui elencato:

$$d(x) = \frac{(b-4)x^{b-5}}{(1+x^{\alpha-1})^{\frac{b-5+\alpha}{\alpha-1}}} \quad (3.17)$$

$$D(x) \equiv \frac{x^{b-4}}{(1+x^{\alpha-1})^{\frac{b-4}{\alpha-1}}} \quad (3.18)$$

$$x(D) = \frac{D^{\frac{1}{b-4}}}{\left(1 - D^{\frac{\alpha-1}{b-4}}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}} \quad (3.19)$$

$$\rho_1 = \rho_0 \left(\frac{\alpha}{b-5} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \quad (3.20)$$

$$\text{dove} \quad b \equiv \frac{11}{3} N_c \quad (3.21)$$

Il significato della $D(\frac{\tilde{\rho}}{\rho_1})$ è la probabilità che una pseudoparticella venga ad avere un ρ più piccolo di $\tilde{\rho}$. Invertire la $D(\rho)$ vuol dire trovare una applicazione che proietta la distribuzione uniforme in $[0, 1]$ nella distribuzione $d(\rho)$; in altre parole, se y_i è un numero random in $[0, 1]$, $x_i = x(y_i)$ (secondo la (3.19)) è un numero che ha $d(x)$ come distribuzione di probabilità. Generando numeri casuali in $[0, 1]$ ed invertendoli mediante la (3.19) avremo dunque una successione $\{x^{(j)}\}_{j=1, n_{p.p.}}$ i cui elementi, moltiplicati per ρ_1 , forniranno la successione cercata $\{\rho^{(j)}\}_{j=1, n_{p.p.}}$. C'è però una piccola sottigliezza: in questa maniera è possibile, per quanto poco probabile, la comparsa di $\rho^{(j)}$ che eccedano il lato del box di Diakonov. Il programma si cautela da questa eventualità ponendo un limite superiore ai numeri casuali generati. Tale limite si ottiene agevolmente ponendo $\bar{x} \equiv d(l_s/\rho_1)$. Il valore di $\bar{x}$ viene comunque ad essere quasi sempre molto vicino ad uno, cioè la coda che tagliamo dalla distribuzione ha un integrale veramente piccolo. Abbiamo quindi dato la prescrizione per:

- generare il centro di ogni pseudoparticella
- generare i size
- generare i quadroversori utili per costruire le necessarie matrici di rotazione nel gruppo di colore.

Di quest'ultimo problema ci occuperemo nella prossima sezione.

3.1.3 L'algoritmo di Cabibbo–Marinari

Matrici in $SU(2)$

Ogni elemento di $SU(2)$ può essere parametrizzato con un quadriversore della sfera 4-dimensionale S_3 nel seguente modo:

$$SU(2) = \{U \mid U = a_4 + i \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}, a_4^2 + \mathbf{a}^2 = 1\} \quad (3.22)$$

dove abbiamo indicato con $\boldsymbol{\sigma}$ le tre matrici di Pauli. In questa parametrizzazione la misura di Haar assume una forma particolarmente semplice:

$$\int [dU] = \frac{1}{\pi^2} \int d^4 a \delta(a^2 - 1) \quad (3.23)$$

con $a^2 = a_4^2 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$

Per le nostre matrici $U^{(j)}$ avremo dunque:

$$U^{(j)} = v_4^{(j)} \mathbb{I}_2 + i v_i^{(j)} \sigma_i = \begin{pmatrix} v_4^{(j)} + i v_3^{(j)} & v_2^{(j)} + i v_1^{(j)} \\ -v_2^{(j)} + i v_1^{(j)} & v_4^{(j)} - i v_3^{(j)} \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

Matrici in $SU(3)$

Descriviamo qui di seguito l'algoritmo di Cabibbo e Marinari [35].

Lo scopo che tale algoritmo si propone è quello di updateare i links di un reticolo in modo che la distribuzione termalizzata dei links venga

$$P(U_l) = \frac{1}{Z} e^{-\beta S(U_l)} [dU_l] \quad (3.25)$$

$$\text{con} \quad Z = \int [dU_l] e^{-\beta S(U_l)} \quad (3.26)$$

dove $[dU_l]$ indica la misura di Haar.

La prescrizione dell'algoritmo è quella di compiere l'updating del singolo link un numero L volte di seguito prima di passare al link successivo.

L'updating vero e proprio utilizza un metropolis e la configurazione proposta viene ogni volta data da

$$U^{\text{old}} \rightarrow U^{\text{new}} = F U^{\text{old}} \quad (3.27)$$

$$F = f_1 f_2 f_3 \quad f_1, f_2, f_3 \in SU(2) \quad (3.28)$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & b_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ b_{31} & 0 & b_{33} \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

con le matrici f_i , nella forma sopra riportata, generate secondo la misura di Haar di $SU(2)$ descritta al paragrafo precedente.

Ora è chiaro che se poniamo $\beta = 0$ nella (3.25) otteniamo

$$P(U_l) = [dU_l] \quad (3.30)$$

Quello che invece non ci era chiaro è se in anche questo caso fosse necessario ripetere l'updating L volte. Cioè è possibile supporre che le (3.27–3.29) forniscano una U^{new} secondo la misura di Haar e che gli L passi di updating servissero solo per ottenere la distribuzione Boltzmanniana vista in (3.25). Se questo fosse il caso potremmo agevolmente generare matrici $SU(3)$ ben distribuite facendo semplicemente uso della (3.27–3.29); se invece la ripetizione di L passi di updating fosse necessaria, avremmo bisogno non più di una ma di L matrici F da mettere in prodotto tra loro.

Abbiamo prodotto insiemi di matrici $SU(3)$ nell'una e nell'altra maniera, confrontando le distribuzioni con quella teorica: il tutto è argomento della prossima sezione.

3.1.4 Distribuzione delle matrici di $SU(3)$

Valori teorici attesi

Una matrice di $SU(3)$ è caratterizzata dall'avere come autovalori tre fasi

$$e^{i\phi_1}, e^{i\phi_2}, e^{i\phi_3} \quad (3.31)$$

Il fatto che il determinante valga uno vincola questi autovalori, in particolare

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 2k\pi \quad , \quad k \in \{-1, 0, 1\} \quad (3.32)$$

quindi noti due angoli, ad esempio ϕ_1 e ϕ_2 , avremo ϕ_3 determinato (modulo 2π); gli autovalori saranno comunque determinati senza ambiguità da due angoli. La misura invariante del gruppo $SU(3)$ si può esprimere proprio come funzione delle fasi [36].

$$P(\phi_1\phi_2) d\phi_1 d\phi_2 = \frac{1}{24\pi^2} |e^{i\phi_1} - e^{i\phi_2}|^2 |e^{i\phi_1} - e^{i\phi_3}|^2 |e^{i\phi_2} - e^{i\phi_3}|^2 d\phi_1 d\phi_2 \quad (3.33)$$

$$= \frac{8}{3\pi^2} \sin^2\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \sin^2\left(\frac{2\phi_1 + \phi_2}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\phi_1 + 2\phi_2}{2}\right) \quad (3.34)$$

La densità di probabilità può essere espressa anche in funzione di un solo numero complesso: la traccia della matrice

$$w = re^{i\phi} = e^{i\phi_1} + e^{i\phi_2} + e^{i\phi_3} \quad (3.35)$$

Dalla traccia è possibile ricavare gli autovalori. Il polinomio caratteristico di una matrice $SU(3)$ dipende infatti solo dalla traccia ed ha la seguente espressione:

$$P(\lambda) = \lambda^3 - w\lambda^2 + \bar{w}\lambda - 1 \quad (3.36)$$

Risolvendo $P(\lambda) = 0$ possiamo vedere come la compattezza delle fasi vincola la traccia a soddisfare un'equazione, qui riportata in forma polare (vedi figura 3.1)

$$27 - r^4 - 18r^2 + 8r^3 \cos(3\phi) \geq 0 \quad (3.37)$$

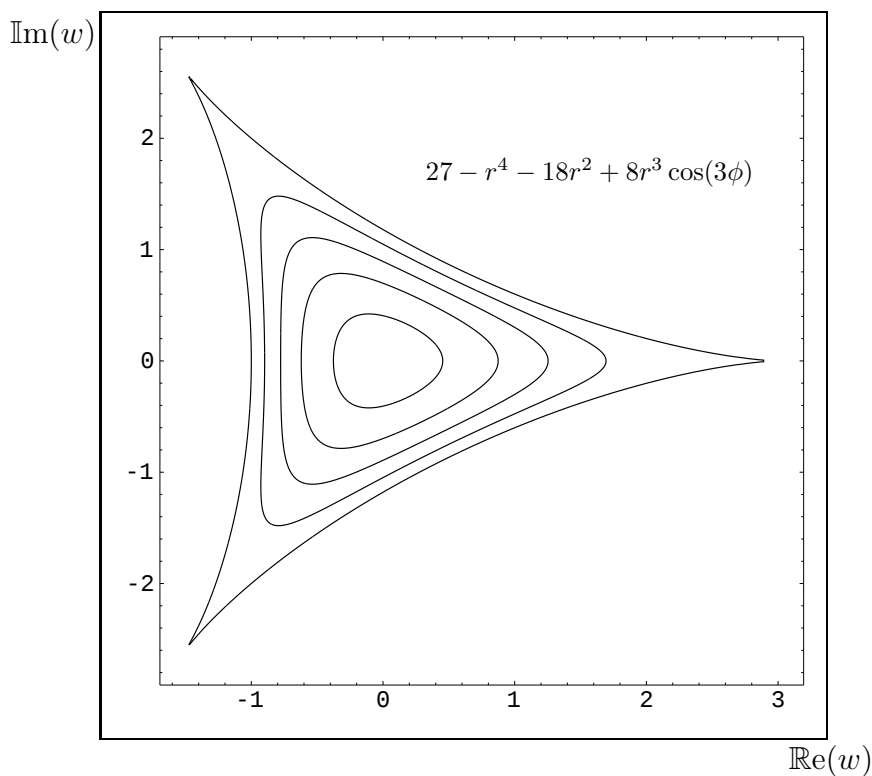


Figura 3.1: L'area interna al triangolo curvilineo rappresenta la porzione di piano complesso accessibile alla traccia di una matrice $SU(3)$; le curve di livello riportano cinque quote (0, 6, 12, 18 e 24) della funzione $27 - r^4 - 18r^2 + 8r^3 \cos(3\phi)$.

infatti il lato sinistro di quest'ultima compare sotto radice nella densità di probabilità che espressa in funzione della traccia viene appunto:

$$P(r, \phi) dr d\phi = \frac{r}{2\pi^2} \sqrt{27 - r^4 - 18r^2 + 8r^3 \cos(3\phi)} dr d\phi \quad (3.38)$$

Test su matrici generate dall'algoritmo Cabibbo–Marinari

Il test consisteva nell'analisi della densità di probabilità $P_{\#}(\phi_1\phi_2)$ su insiemi di matrici generate con l'algoritmo di Cabibbo–Marinari:

- prendendo direttamente una sequenza di N_m matrici F così come nelle (3.28–3.29) (nelle formule e nelle figure che seguiranno useremo l'indice (1) per indicare questo esperimento);
- prendendo una sequenza di N_m matrici ognuna data dal prodotto di 10 matrici generate come al punto precedente. (in questo caso useremo l'indice (10)). Il valore $L = 10$ era segnalato nell'articolo dove l'algoritmo veniva presentato: abbiamo realizzato tests con $1 \leq L \leq 10$. Su questi casi estremi in particolare abbiamo fatto una statistica più consistente ($N_m = 10^8$).

I dati raccolti sono stati organizzati in forma di istogramma (40 divisioni sugli assi $\phi_1, \phi_2 \in [-\pi, \pi]$) che riportasse la densità di probabilità (essenzialmente il numero di occorrenze nell'intervallo considerato fratto N_m , il numero totale di matrici sottoposte al test). I risultati sono stati comparati con la densità teorica $P_{th}(\phi_1\phi_2)$, che si ottiene mediando la (3.34) sui quadratini (di lato 2δ) che piastrellano il dominio dell'istogramma. Il risultato, per un quadratino centrato in (ϕ_1, ϕ_2) è

$$\begin{aligned}
 P_{th}(\phi_1\phi_2) = & \frac{1}{4\delta^2} \int_{\phi_1-\delta}^{\phi_1+\delta} \int_{\phi_2-\delta}^{\phi_2+\delta} \frac{8}{3\pi^2} \sin^2\left(\frac{\phi_1-\phi_2}{2}\right) \sin^2\left(\frac{2\phi_1+\phi_2}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\phi_1+2\phi_2}{2}\right) d\phi_2 d\phi_1 = \\
 = & \frac{1}{864\pi^2} \left\{ -288 \cos[\varphi_1 - \varphi_2] - 36 \cos[2(\varphi_1 - \varphi_2)] + 32 \cos[3(\varphi_1 + \varphi_2)] + \right. \\
 & + 9 \cos[4\varphi_1 + 2\varphi_2 - 6\delta] + 9 \cos[2\varphi_1 + 4\varphi_2 - 6\delta] + 72 \cos[2\varphi_1 + \varphi_2 - 3\delta] + \\
 & + 72 \cos[\varphi_1 + 2\varphi_2 - 3\delta] + 144 \cos[\varphi_1 - \varphi_2 - 2\delta] + 18 \cos[2(\varphi_1 - \varphi_2 - 2\delta)] + \\
 & - 16 \cos[3(\varphi_1 + \varphi_2 - 2\delta)] - 72 \cos[2\varphi_1 + \varphi_2 - \delta] - 9 \cos[2(2\varphi_1 + \varphi_2 - \delta)] + \\
 & - 72 \cos[\varphi_1 + 2\varphi_2 - \delta] - 9 \cos[2(\varphi_1 + 2\varphi_2 - \delta)] - 72 \cos[2\varphi_1 + \varphi_2 + \delta] + \\
 & - 9 \cos[2(2\varphi_1 + \varphi_2 + \delta)] - 72 \cos[\varphi_1 + 2\varphi_2 + \delta] - 9 \cos[2(\varphi_1 + 2\varphi_2 + \delta)] + \\
 & + 144 \cos[\varphi_1 - \varphi_2 + 2\delta] + 18 \cos[2(\varphi_1 - \varphi_2 + 2\delta)] - 16 \cos[3(\varphi_1 + \varphi_2 + 2\delta)] + \\
 & + 72 \cos[2\varphi_1 + \varphi_2 + 3\delta] + 72 \cos[\varphi_1 + 2\varphi_2 + 3\delta] + 9 \cos[4\varphi_1 + 2\varphi_2 + 6\delta] + \\
 & + 9 \cos[2\varphi_1 + 4\varphi_2 + 6\delta] - 96\delta \sin[3(\varphi_1 - \delta)] - 96\delta \sin[3(\varphi_2 - \delta)] + \\
 & \left. + 96\delta \sin[3(\varphi_1 + \delta)] + 96\delta \sin[3(\varphi_2 + \delta)] \right\} + \left(\frac{\delta}{\pi}\right)^2.
 \end{aligned}$$

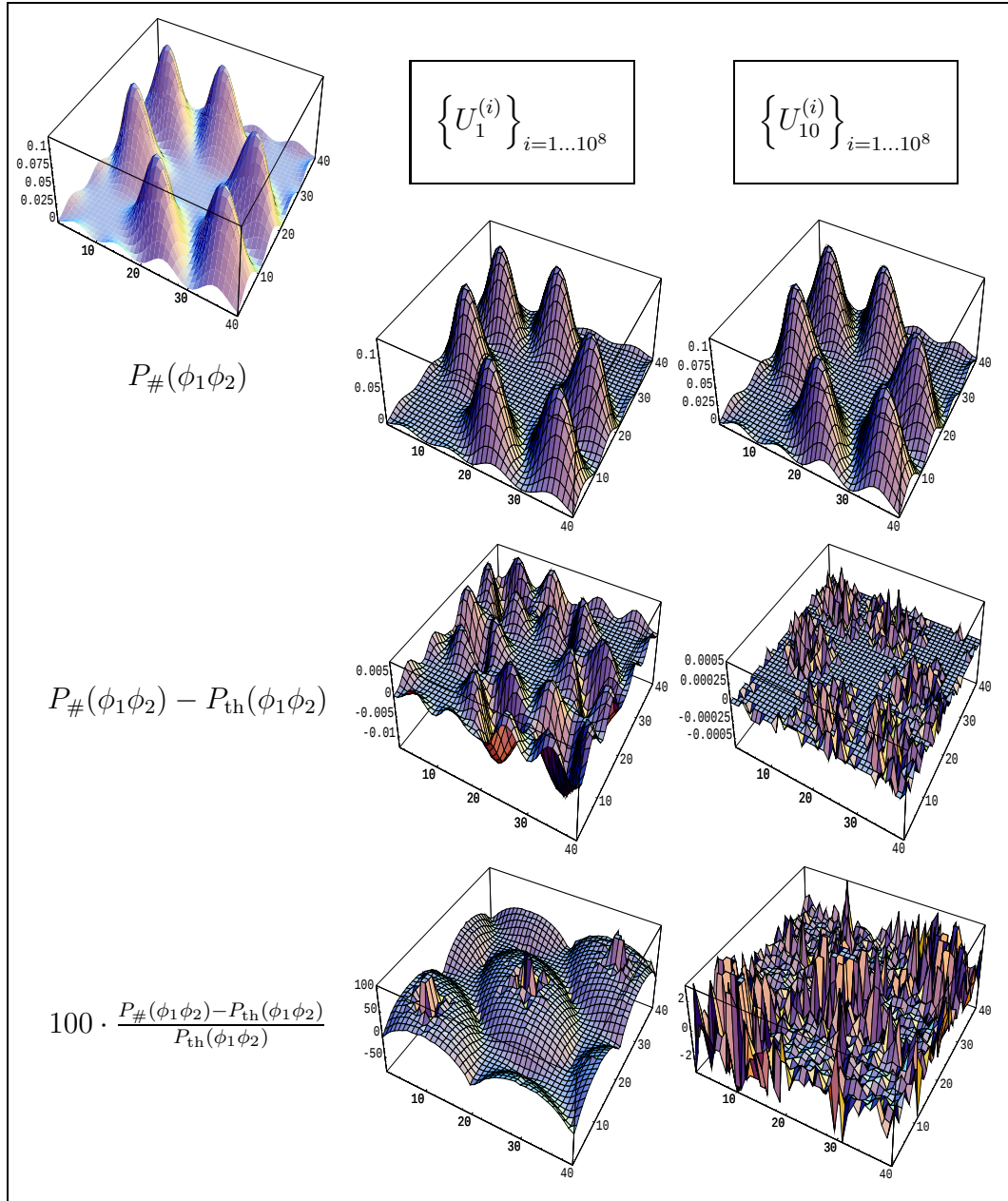


Figura 3.2: In alto a sinistra è riportata la funzione densità di probabilità teorica. Dall'alto in basso: densità di probabilità testata, differenza con il valore teorico atteso e scarto percentuale.

In tabella 3.1 sono riportati il Numero dei gradi di libertà ($N_{\text{g.d.l.}}$), χ^2 , χ^2 ridotto ($\chi_r^2 = \frac{\chi^2}{N_{\text{g.d.l.}}}$) ed il livello di confidenza (C.L. = $P_{N_{\text{g.d.l.}}}(\tilde{\chi}_r^2 \geq \chi_r^2)$) mentre in figura 3.2 sono riportati gli istogrammi. Il test dimostra che l'algo-

	$L = 1$	$L = 10$
$N_{\text{g.d.l.}}$	1573.	1573.
χ^2	1684662.	1544.
$\chi_r^2 = \frac{\chi^2}{N_{\text{g.d.l.}}}$	1070.9863	0.9818
C.L. = $P_{N_{\text{g.d.l.}}}(\tilde{\chi}_r^2 \geq \chi_r^2)$	0.00 %	69.51 %

Tabella 3.1: Risultati del test effettuato su due set di 10^8 matrici $SU(3)$ differenziati da $L = 1$ ed $L = 10$. Sono dati i valori del numero dei gradi di libertà ($N_{\text{g.d.l.}}$), χ^2 , χ^2 ridotto (χ_r^2) ed il livello di confidenza (C.L.)

ritmo con $L = 10$ riproduce molto bene la distribuzione teorica mentre non è così per la versione più semplice con $L = 1$. D'ora in poi ci riferiremo pertanto a questo sistema di produzione di matrici. Ricapitolando, il programma che genera configurazioni, dopo aver generato size ed i centri delle p.p., genera $30 \times n_{\text{p.p.}}$ quadriversori $\{v_i^{(jl)}\}_{l=1,30; i=1,4}^{j=1 \dots n_{\text{p.p.}}}$ dopodiché, mediante le (3.28–3.29), questi vengono convertiti in $10 \times n_{\text{p.p.}}$ matrici $\{F_l^{(j)}\}_{l=1,10}^{j=1 \dots n_{\text{p.p.}}}$ e quindi in $n_{\text{p.p.}}$ matrici $\{U^{(j)}\}_{j=1 \dots n_{\text{p.p.}}}$. A questo punto, facendo uso della (3.15–3.16) è possibile scrivere i campi di gauge. In notazione matriciale, esplicitando i corretti valori della $\bar{\eta}$ (η)

otteniamo dalle (3.15–3.15):

$$\begin{aligned}
 A_1^{(j)}(x) &= f U^{(j)} \begin{pmatrix} x_2 - x_2^{(j)} & \mp x_4 \pm x_4^{(j)} + i(x_3 - x_3^{(j)}) & 0 \\ \mp x_4 \pm x_4^{(j)} - i(x_3 - x_3^{(j)}) & -x_2 + x_2^{(j)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} U^{(j)\dagger} \\
 A_2^{(j)}(x) &= f U^{(j)} \begin{pmatrix} -x_1 + x_1^{(j)} & x_3 - x_3^{(j)} \pm i(x_4 - x_4^{(j)}) & 0 \\ x_3 - x_3^{(j)} \mp i(x_4 - x_4^{(j)}) & x_1 - x_1^{(j)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} U^{(j)\dagger} \\
 A_3^{(j)}(x) &= f U^{(j)} \begin{pmatrix} \mp x_4 \pm x_4^{(j)} & -x_2 + x_2^{(j)} - i(x_1 - x_1^{(j)}) & 0 \\ -x_2 + x_2^{(j)} + i(x_1 - x_1^{(j)}) & \pm x_4 \mp x_4^{(j)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} U^{(j)\dagger} \\
 A_4^{(j)}(x) &= \pm f U^{(j)} \begin{pmatrix} x_3 - x_3^{(j)} & x_1 - x_1^{(j)} - i(x_2 - x_2^{(j)}) & 0 \\ x_1 - x_1^{(j)} + i(x_2 - x_2^{(j)}) & -x_3 + x_3^{(j)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} U^{(j)\dagger} \\
 \text{con } f &= f(|x - x^{(j)}|, \rho^{(j)}) \equiv \frac{\rho^{(j)2}}{(x - x^{(j)})^2 [(x - x^{(j)})^2 + \rho^{(j)2}]} \quad (3.39)
 \end{aligned}$$

$$A_\mu(x) = \sum_{j=1}^{n_{\text{p.p.}}} A_\mu^{(j)}(x) \quad (3.40)$$

(dove compaiono due segni quello superiore corrisponde all'istantone e quello inferiore all'antiistantone).

Ora che abbiamo un buon generatore di matrici possiamo tentare una verifica su quanto esposto per la distribuzione della traccia delle matrici $SU(3)$. Abbiamo generato $2 \cdot 10^5$ matrici e posto la traccia di ognuna sul piano complesso: ciò che si osserva è che il triangolo curvilineo illustrato in figura 3.1 delimita effettivamente l'area ricoperta nel nostro esperimento (figura 3.3)

Un'ultima osservazione riguarda la figura 3.2. Guardando la densità di probabilità teorica $P_{\text{th}}(\phi_1 \phi_2)$ si nota che i sei massimi sono distribuiti:

- due sull'asse $\phi_1 = 0$;
- due sull'asse $\phi_2 = 0$;

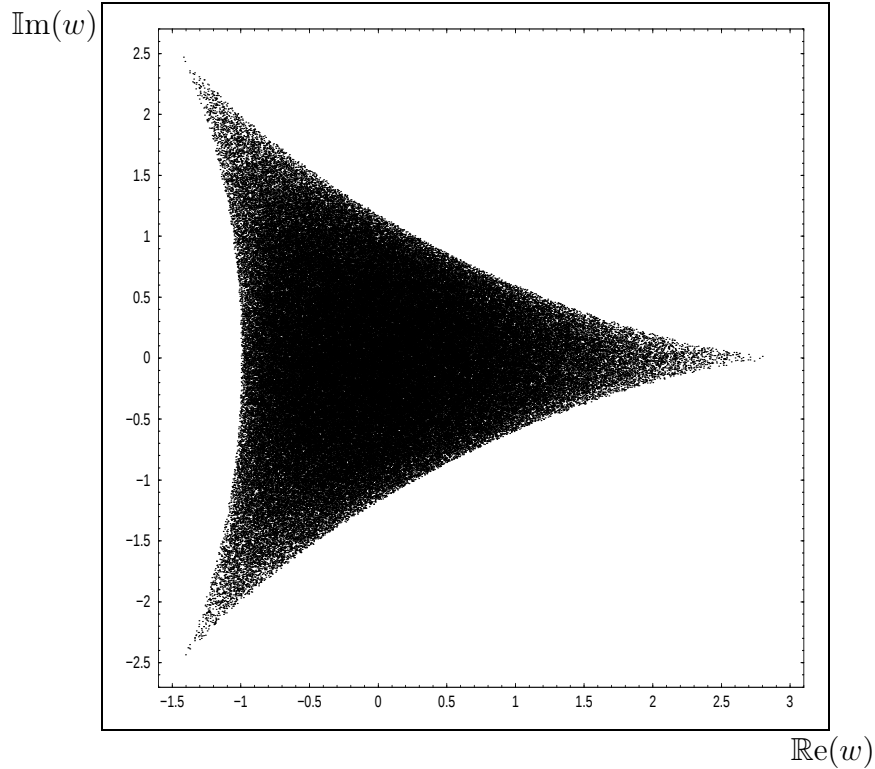


Figura 3.3: Grafico della distribuzione della traccia di matrici $SU(3)$ su $\mathbb{C}$

- due sulla bisettrice $\phi_1 + \phi_2 = 0$ (che è come dire $\phi_3 = 0$).

Queste tre rette che contengono i massimi sono proprio i sottogruppi $SU(2)$ di $SU(3)$. È infatti ovvio che l'autovalore corrispondente all'angolo azzerato vale uno. Questo ci dà un'indicazione di quanto densi siano questi sottogruppi in $SU(3)$ (Sul piano complesso in figura 3.1 i sottogruppi $SU(2)$ giacciono invece sull'asse reale [37]).

3.1.5 Primi tests all'insieme di Diakonov

Il programma che abbiamo assemblato è ora in grado di generare i campi di gauge in qualsiasi punto del box. Sicuramente più siamo prossimi al centro e più simmetria di densità di p.p. avremo; da un punto posto su un lato della scatola si vede da un lato un mondo popolato di istantoni, dall'altro il vuoto. Se vogliamo studiare un qualsiasi operatore converrà dunque valutarlo al centro del box su una catena di configurazioni diverse e poi fare una statistica dei risultati; ciò che ne viene corrisponderà ad una media su un vuoto caratterizzato da istantoni (sempre ovviamente nella misura in cui il modello in analisi è in grado di descrivere la realtà) ed avremo una stima del VEV. Abbiamo fatto

una prova con il condensato gluonico e la carica topologica.

Su ogni configurazione di Diakonov generata dal programma calcolavamo:

$$A_\nu(-\varepsilon \hat{e}_\mu) \quad A_\nu(\varepsilon \hat{e}_\mu)$$

dove con $\hat{e}_\mu$ si è indicato il quadroversore nella direzione μ -esima. Eseguiamo poi una differenziazione numerica dei campi prodotti allo scopo di ottenere:

$$\begin{aligned} \hat{\partial}_\mu A_\nu(0) &\equiv \frac{A_\nu(\varepsilon \hat{e}_\mu) - A_\nu(-\varepsilon \hat{e}_\mu)}{2\varepsilon} \\ \hat{A}_\nu(0) &= \frac{A_\nu(\varepsilon \hat{e}_\mu) + A_\nu(-\varepsilon \hat{e}_\mu)}{2} \end{aligned}$$

Chiaramente il tutto è da ritenersi $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$. A questo punto potevamo calcolare

$$\begin{aligned} \hat{G}_{\mu\nu} &= \hat{\partial}_\mu A_\nu - \hat{\partial}_\nu A_\mu - i [\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu] \\ G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a &= 2 \text{Tr} \hat{G}_{\mu\nu} \hat{G}_{\mu\nu} \\ Q &= \frac{1}{32\pi^2} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}_{\mu\nu}^a = \frac{1}{32\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr} \hat{G}_{\mu\nu} \hat{G}_{\rho\sigma} \end{aligned}$$

Mediando le grandezze soprascritte (e valutando la deviazione standard dalla media come errore), ottenevamo le stime di interesse. Il numero di misure effettuate sarà indicato nelle tabelle con N_{conf} . Possiamo confrontare il condensato di $SU(3)$ con la (2.56) che qui riportiamo

$$\text{C.G.} \equiv \langle \frac{1}{4\pi^2} : G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a : \rangle = 0.012 \text{ (Gev)}^4$$

mentre per la carica topologica, avremo come stima del VEV

$$\langle Q \rangle \sim \frac{n_I - n_A}{V} \equiv Q_{\text{th}}$$

Con riferimento alla sezione 3.1.2 riporteremo qui di seguito i parametri mai variati in questo esperimento.

$$n_{IA}^1 = 1 \text{ fm}^{-4} \quad \rho_0 = 0.333 \text{ fm} \quad n_{\text{p.p.}} = 128 \quad \alpha = 5 \quad \gamma = 1$$

¹ n_{IA} rappresenta l'unica eccezione, ne abbiamo infatti variato il valore in tabella 3.6

N_{conf}	$5 \cdot 10^2$	$5 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^4$
C.G. (Gev) ⁴	0.024 $\pm$ 0.006	0.0230 $\pm$ 0.0017	0.0237 $\pm$ 0.0008
Q (fm) ⁻⁴	0.24 $\pm$ 0.22	-0.017 $\pm$ 0.060	0.011 $\pm$ 0.025
Q_{th} (fm) ⁻⁴	0.00	0.000	0.000

Tabella 3.2: Misure di $\langle G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a \rangle$ e $\langle Q \rangle$ sull'insieme di Diakonov in $SU(2)$ con $n_i = 64$

N_{conf}	$5 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^6$
C.G. (Gev) ⁴	0.0236 $\pm$ 0.0003	0.0239 $\pm$ 0.0002	0.02391 $\pm$ 0.00017
Q (fm) ⁻⁴	0.0020 $\pm$ 0.0087	0.0074 $\pm$ 0.0064	0.0094 $\pm$ 0.0077
Q_{th} (fm) ⁻⁴	0.0000	0.0000	0.0000

Tabella 3.3: Misure di $\langle G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a \rangle$ e $\langle Q \rangle$ sull'insieme di Diakonov in $SU(2)$ con $n_i = 64$

n_I	78	103
C.G. (Gev) ⁴	0.02368 $\pm$ 0.00013	0.02393 $\pm$ 0.00018
Q (fm) ⁻⁴	0.6117 $\pm$ 0.0060	0.2206 $\pm$ 0.0040
Q_{th} (fm) ⁻⁴	0.6094	0.2186

Tabella 3.4: Misure di $\langle G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a \rangle$ e $\langle Q \rangle$ sull'insieme di Diakonov in $SU(2)$ con $N_{\text{conf}} = 5 \cdot 10^6$

n_I	78	103
C.G. (Gev) ⁴	0.0194 $\pm$ 0.0006	0.0194 $\pm$ 0.0006
Q (fm) ⁻⁴	0.209 $\pm$ 0.005	0.605 $\pm$ 0.005
Q_{th} (fm) ⁻⁴	0.219	0.609

Tabella 3.5: Misure di $\langle G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a \rangle$ e $\langle Q \rangle$ sull'insieme di Diakonov in $SU(3)$ con $N_{\text{conf}} = 10^6$

n_I	64	65
$n_{IA} \text{ (fm)}^{-4}$	1	2
C.G. (Gev) ⁴	0.01892 ± 0.00014	0.0495 ± 0.0013
$Q \text{ (fm)}^{-4}$	-0.001 ± 0.004	0.023 ± 0.010
$Q_{\text{th}} \text{ (fm)}^{-4}$	0.000	0.031

Tabella 3.6: Misure di $\langle G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a \rangle$ e $\langle Q \rangle$ sull'insieme di Diakonov in $SU(3)$ con $N_{\text{conf}} = 10^6$

$SU(N_c)$	$SU(2)$	$SU(3)$
C.G. (Gev) ⁴	0.0236 ± 0.0006	0.0192 ± 0.0005
$Q \text{ (fm)}^{-4}$	0.405 ± 0.018	0.401 ± 0.013
$Q_{\text{th}} \text{ (fm)}^{-4}$	0.391	0.391

Tabella 3.7: Misure di $\langle G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a \rangle$ e $\langle Q \rangle$ sull'insieme di Diakonov con $n_I = 89$ e $N_{\text{conf}} = 10^5$

3.2 Misure sull'insieme di Diakonov

3.2.1 Costruzione del reticolo

Abbiamo mostrato nelle equazioni a pag. 58 come poter costruire i campi di gauge a partire dalle variabili collettive che il programma genera ogni qual volta produce una configurazione. Siamo interessati a costruire un reticolo che, per motivi già esposti di isotropia, vorremo realizzare nel centro del box. Acciocché poi da tutti i punti del reticolo (quindi anche dal bordo) si possa vedere intorno una distribuzione di particelle isotropa è bene mettere il reticolo ben “immerso” nel box, ossia è bene che il reticolo non occupi che una frazione del box di Diakonov. Andiamo a descrivere quali saranno i parametri utilizzati mettendoli in relazione tra loro nonché con quelli già definiti nella sezione 3.1.2.

$\mathbf{a}$, lattice spacing;

$\mathbf{a}_s$, Numero di punti reticolari sul lato spaziale;

$\mathbf{a}_t$, Numero di punti reticolari sul lato temporale;

ρ_0^a , ρ_0 in unità reticolari ($\rho_0 = a \rho_0^a$);

$\mathbf{d}^a$, distanza media tra le p.p. in unità reticolari ($\langle d \rangle = a d^a$);

γ' , rapporto tra lato del box e lato del reticolo (uguale sia per i lati spaziali che per quello temporale);

$\gamma'^{(\text{l.b.})}$, è il minimo valore di γ' che consentiamo al nostro sistema. Abbiamo fatto in modo che il programma calcoli γ' , anziché darlo come input, però con $\gamma'^{(\text{l.b.})}$ richiediamo che questo rapporto sia comunque sopra una certa soglia;

$\mathbf{l}_s$, lato spaziale in unità reticolari ($l_s = a (a_s - 1)$ e $L_s = \gamma' l_s$);

$\mathbf{l}_t$, lato temporale in unità reticolari ($l_t = a (a_t - 1)$ e $L_t = \gamma' l_t$);

$\mathbf{v}$, Volume del reticolo; ($V = (\gamma')^4 v$).

Abbiamo realizzato il programma in modo che gli input fossero:

$$\left(\mathbf{a} , \mathbf{a}_s , \mathbf{a}_t , \rho_0^a , \mathbf{d}^a , \gamma'^{(\text{l.b.})} \right)$$

Gli altri parametri, quelli qui definiti più quelli già introdotti nella sezione 3.1.2, sono quasi tutti derivabili da questi input, a parte ulteriori condizioni che d'ora in poi considereremo fissate e che riportiamo qua sotto:

$$N_c = 3 \quad (3.41)$$

$$\alpha = 5 \quad (3.42)$$

$$n_I = n_A \quad (\text{ e quindi } n_{\text{p.p.}} = 2 n_I) \quad (3.43)$$

Gli unici due parametri ancora non fissati sono γ' ed $\mathbf{n}_I$.

Per il volume del box, possiamo scrivere

$$V = L_s^3 L_t = \gamma L_s^4 = \gamma (\gamma' l_s)^4$$

d'altra parte la (3.14) era

$$V = \frac{n_{\text{p.p.}}}{n_{IA}}$$

dall'uguaglianza delle due segue

$$n_I = \frac{n_{\text{p.p.}}}{2} = \frac{\gamma n_{IA}}{2} (\gamma' l_s)^4. \quad (3.44)$$

Quindi, al crescere di n_I crescerà anche γ' e viceversa. Dovendo essere

$$\gamma' \geq \gamma'^{(\text{l.b.})}$$

dovremo imporre

$$n_I \geq \frac{\gamma n_{IA}}{2} \left(\gamma'^{(\text{l.b.})} l_s \right)^4.$$

Scegliamo pertanto

$$n_I = \left[\frac{\gamma n_{IA}}{2} \left(\gamma'^{(\text{l.b.})} l_s \right)^4 \right]^2. \quad (3.45)$$

ed avremo

$$n_A = n_I \quad n_{\text{p.p.}} = 2 n_I \quad \gamma' = \frac{1}{l_s} \left(\frac{n_{\text{p.p.}}}{\gamma n_{IA}} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (3.46)$$

Rimane ancora da fare un considerazione: il numero di pseudoparticelle dentro il reticolo ($n_{\text{p.p.}}^{(r)}$) sarà dato in media da

$$n_{\text{p.p.}}^{(r)} = n_{\text{p.p.}} \frac{v}{V} = \frac{n_{\text{p.p.}}}{(\gamma')^4}$$

quindi, per la (3.44),

$$n_{\text{p.p.}}^{(r)} = \gamma n_{IA} l_s^4 = \gamma \frac{1}{\langle d \rangle^4} [a(a_s - 1)]^4 = \gamma \frac{1}{(d^a)^4} (a_s - 1)^4 \quad (3.47)$$

Dal momento che stiamo studiando insiemi di particelle è buona regola che dentro il reticolo riusciamo a collocarcene qualcuna. In particolare introdurremo un parametro sensibile alla presenza di sottogruppi $SU(2)$, e quindi alle p.p.. Dovremo quindi curarci di scegliere dei d^a non troppo elevati, così da garantirci (almeno nella media su diverse configurazioni) delle p.p. nel volume fiduciale in analisi. Indicando con $\bar{n}_{\text{p.p.}}^{(r)}$ il numero medio minimo di particelle che vogliamo assicurarci nel reticolo, invertendo la (3.47) otteniamo:

$$d^a \leq \left(\frac{\gamma}{\bar{n}_{\text{p.p.}}^{(r)}} \right)^{\frac{1}{4}} (a_s - 1) \quad (3.48)$$

Rimane ora da discretizzare lo spazio tempo. Per come abbiamo centrato nello zero il box di Diakonov, i valori delle coordinate spazio-temporali del reticolo sono:

$$x_i = -\frac{l_s}{2} + a(n_i - 1) \quad n_i \in \{1, 2, \dots, a_s\} \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (3.49)$$

$$x_4 = -\frac{l_t}{2} + a(n_4 - 1) \quad n_4 \in \{1, 2, \dots, a_t\} \quad (3.50)$$

Costruiremo i links esponenzializzando i campi di gauge come dalla (1.48) a parte il fatto che porremo $g_0 = 0$ essendo i nostri campi già riscaldati del fattore g_0 come dalla (1.9).

Per esponenzializzare, anziché ricorrere a sviluppi in serie e quindi introdurre altre approssimazioni nel modello, decidiamo di diagonalizzare i campi, esponenzializzare gli autovalori, e quindi riapplicare la matrice diagonalizzante cioè

$$\text{detta } F \text{ la matrice } SU(3) \left| F A_\mu(x) F^\dagger = \Lambda_\mu(x) \equiv \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \right.$$

² $\lceil x \rceil$ indica l'intero più prossimo a x non minore di x .

avremo

$$F U_\mu(x) F^\dagger = F e^{i a A_\mu(x)} F^\dagger = e^{i a F A_\mu(x) F^\dagger} = e^{i a \Lambda_\mu(x)} = \begin{pmatrix} e^{i a \lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i a \lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i a \lambda_3} \end{pmatrix}$$

e quindi

$$U_\mu(x) = F^\dagger \begin{pmatrix} e^{i a \lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i a \lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i a \lambda_3} \end{pmatrix} F \quad (3.51)$$

Ora che abbiamo il reticolo troveremo dei cammini reticolari chiusi sui quali studieremo un parametro la cui definizione è argomento della prossima sezione.

3.2.2 Il parametro $SU(2)$ – $SU(3)$

Abbiamo visto nella sezione (3.1.4) come una matrice $U \in SU(3)$ abbia come autovalori tre fasi (autovalori che si ottengono risolvendo $P(\lambda) = 0$, dove quest'ultimo è dato dalla (3.36)) vincolate però dalla condizione $\det(U) = 1$. Se prendiamo gli angoli (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) associati a tali fasi $(e^{i\phi_1}, e^{i\phi_2}, e^{i\phi_3})$ abbiamo che uno di essi, ad esempio ϕ_3 viene ad essere determinato dagli altri due a parte multipli di 2π . Per rimuovere questa ambiguità fissiamo una volta per tutte la determinazione di tutti e tre gli angoli ponendoli in $[-\pi, \pi]$. Nel resto di questa esposizione, salvo diversamente indicato, ci riferiremo sempre alla figura 3.5; in particolare il riquadro (A) mostra $\phi_3(\phi_1, \phi_2)$ mentre nel riquadro (B) abbiamo messo la somma dei tre angoli in funzione di ϕ_1 e ϕ_2 .

Abbiamo già sottolineato come una matrice appartenente ad un sottogruppo $SU(2)$ di $SU(3)$ sia caratterizzata dall'aver uno degli angoli uguale a zero. Un primo tentativo che abbiamo fatto nell'obiettivo di costruire un parametro sensibile a questi sottogruppi è stato quello di controllare la norma degli angoli, in particolare la minima tra le tre norme (riquadro (C)). Effettivamente, un parametro così costruito ha il pregio di dare zero sui sottogruppi $SU(2)$ (che ricordiamo corrispondere alle tre rette $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = 0$ e $\phi_1 + \phi_2 = 0$) ma ha anche il difetto di diventare molto piccolo in prossimità del centro del quadrato, dove tutti e tre gli angoli vengono ad essere molto piccoli. Quindi, anche nel caso di angoli tutti uguali tra loro, il parametro si avvicina a zero con il diminuire della norma.

Si può ovviare a questo inconveniente dividendo quanto proposto per la norma euclidea di $\vec{\phi}$ ($\vec{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ e il grafico di $|\phi|$ è riportato nel riquadro (D)) la quale si annulla anch'essa per $\vec{\phi} \rightarrow \vec{0}$.

Proprio in $\vec{0}$ il rapporto considerato da una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$, che

possiamo rimuovere sostituendo zero, in virtù del fatto che $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0$ individuano proprio la matrice identità, anch'essa sottogruppo $SU(2)$.

Il parametro, che chiameremo $\Xi(\phi_1, \phi_2)$ o $\Xi(U)$ a seconda dei casi, è stato poi moltiplicato per un fattore $\sqrt{6}$ e traslato di un termine costante (2).

Come risultato (riquadri (E) ed (F))

$$\Xi(\phi_1, \phi_2) \equiv 2 + \frac{\min(|\phi_1|, |\phi_2|, |\phi_3|)}{\sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2}} \sqrt{6} \quad (3.52)$$

Nella parte sinistra della sottostante figura 3.4 abbiamo riportato le tre rette r_1 , r_2 ed r_3 dove Ξ vale zero. Nelle due regioni triangoliformi indicate con A si ha invece $\Xi \in [2, 2 + \sqrt{2}]$ mentre nel resto della figura avremo $\Xi \in [2, 3]$. In particolare i massimi di Ξ si hanno in $(\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi)$ e $(-\frac{2}{3}\pi, -\frac{2}{3}\pi)$ dove tra l'altro si ha $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3$.

le regioni triangolari sono evidenti anche dal riquadro (F) della fig. 3.5 dove il codominio di Ξ è stato ristretto a $[2, 3]$.

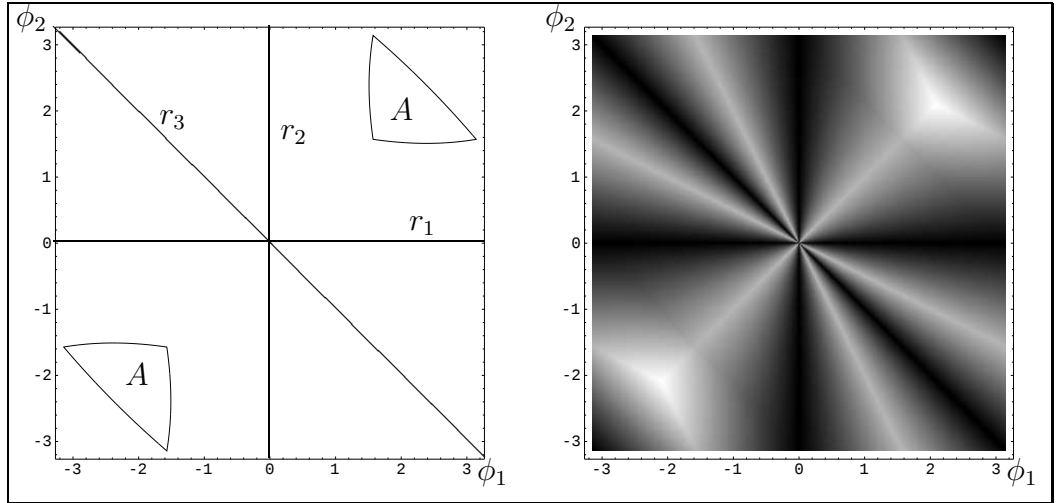


Figura 3.4: Mappatura del dominio di $\Xi(\phi_1, \phi_2)$ e diagramma di densità

Nella parte destra della figura abbiamo invece riportato un diagramma di densità dove sfumature più chiare di grigio corrispondono ai più elevati valori del parametro Ξ .

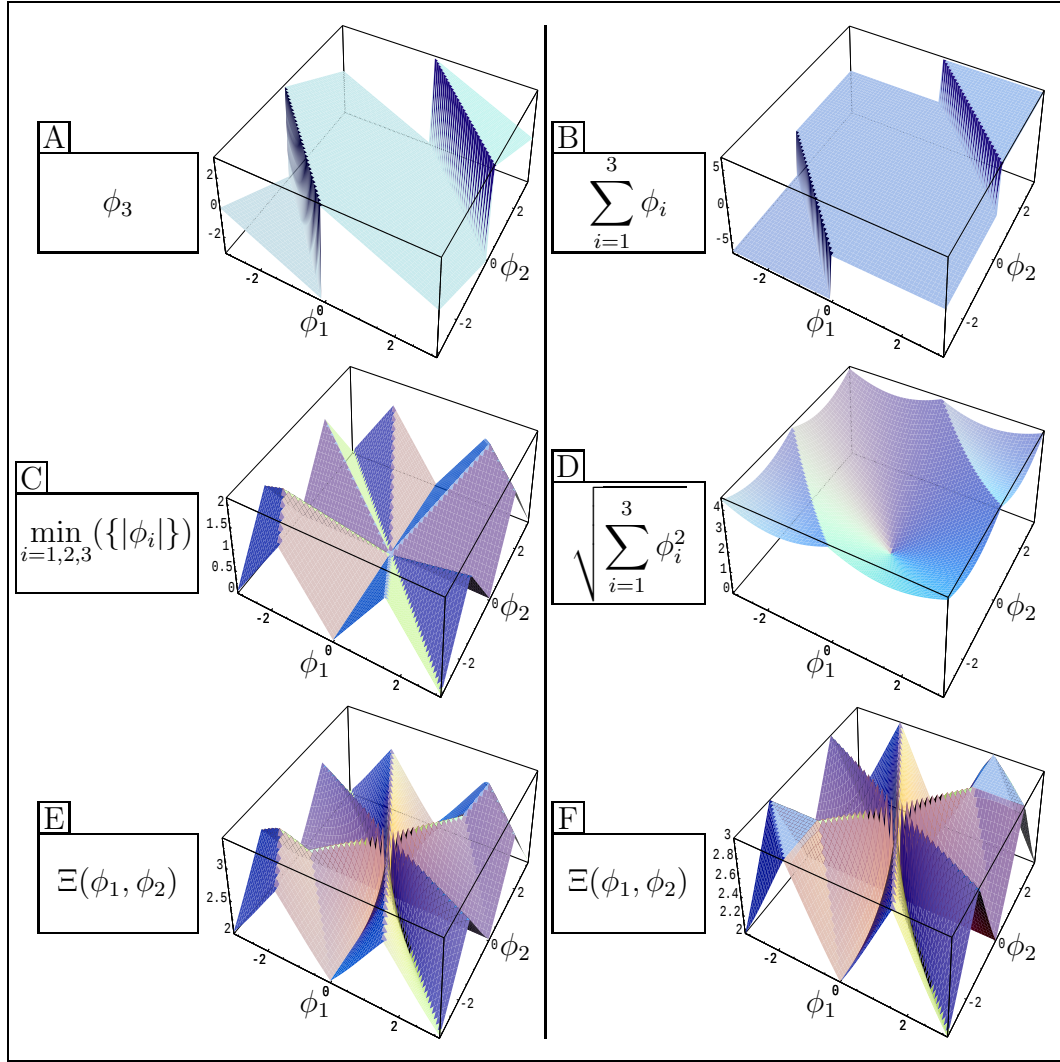


Figura 3.5: Nei riquadri sono riportate funzioni di ϕ_1 e ϕ_2 utilizzate nella scelta del parametro $\Xi(\phi_1, \phi_2)$. Il dominio è $(\phi_1, \phi_2) \in [-\pi, \pi]^2$ ed anche per ϕ_3 abbiamo scelto la determinazione $\phi_3 \in [-\pi, \pi]$. La differenza tra il riquadro (E) e il riquadro (F) sta nella nel range della terza coordinata che viene ad essere $(2 \div 3)$ in (E) e $(2 \div 2 + \sqrt{2})$ in (F).

Un altro valore che useremo come riferimento è il valor medio di Ξ che possiamo calcolare su una serie di 10^8 matrici $SU(3)$ generata come abbiamo esposto in sezione 3.1.4.

Il risultato (con la deviazione standard dalla media come errore) è:

$$\langle \Xi \rangle_{SU(3)} = 2.314696 \pm 0.000021$$

Riportiamo in figura 3.6 l'istogramma di frequenza

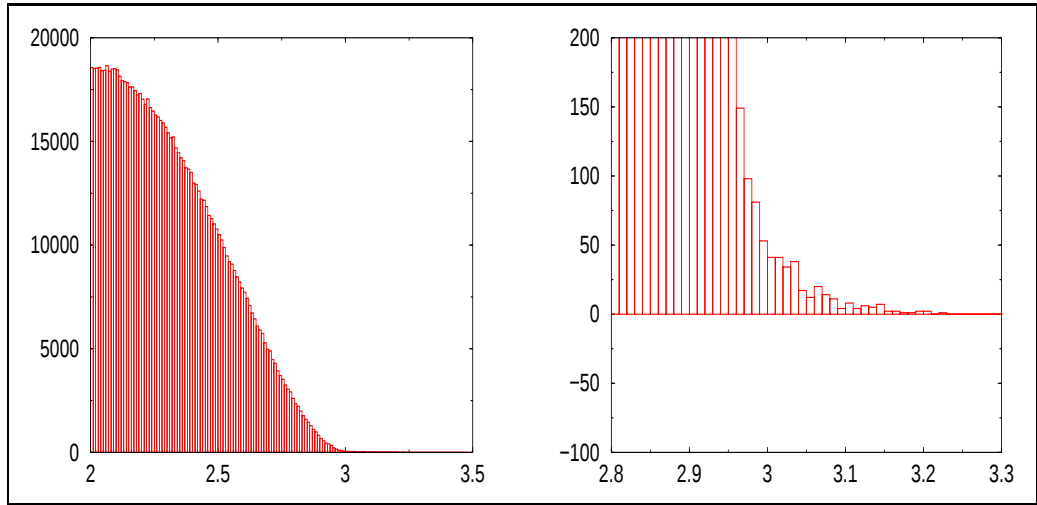


Figura 3.6: Iistogramma di frequenza di Ξ su un insieme di 10^8 matrici $SU(3)$ distribuite secondo la misura di Haar. La base delle colonne è larga 0.01. Dall'istogramma di destra si può constatare che il parametro Ξ assume principalmente valori compresi tra 2 e 3

3.2.3 I cammini reticolari analizzati

Il parametro che abbiamo costruito andrà ad analizzare matrici che si ottengono dal reticolo mediante prodotto di links sui cammini chiusi.

Ciò che abbiamo in mente è di connettere due plaquettes (con orientazioni relative variabili) mediante un trasporto parallelo dall'una all'altra.

Ossia, mentre quando generavamo una plaquette mettevamo in prodotto i links perimetrali di un quadratino del reticolo, ora, anziché richiudere il percorso lì da dove eravamo partiti, continueremo la produttoria su altri links che puntano in una specificata direzione per poi, una volta arrivati al punto prefissato, percorrere lì un quadratino perimetrale (cioè un'altra plaquette) e tornare a chiudere il percorso effettuando il trasporto parallelo (sui medesimi links) a

ritroso. In figura 3.7 abbiamo illustrato uno di questi cammini, in particolare quello che connette la plaquette $\Pi_{12}(\hat{n})$ alla plaquette $\Pi_{23}(\hat{m})$ (con $\hat{m}$ ed $\hat{n}$ distanti d unità reticolari in direzione (1)) mediante un trasporto parallelo lungo la direzione (1).

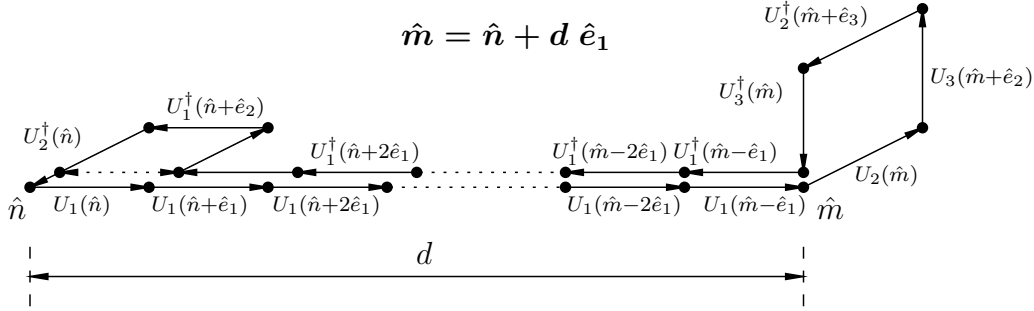


Figura 3.7: Esempio di trasporto parallelo tra 2 plaquettes poste a distanza d

Le plaquettes che conatteremo saranno sempre considerate su siti con tre coordinate uguali, ossia il trasporto avverrà sempre in una direzione parallela ad uno dei lati del reticolo.

Detta $\Pi_{\mu\nu}(\hat{n})$ la prima plaquette e $\Pi_{\rho\sigma}(\hat{m})$ la seconda, divise da una distanza d lungo la direzione τ , chiameremo $M_{\mu\nu;\rho\sigma}^{\tau}(\hat{n}, d)$ il cammino fin qui considerato. In altri termini, indicato con S il prodotto ordinato dei links che connettono $\hat{m}$ ad $\hat{n}$, avremo:

$$M_{\mu\nu;\rho\sigma}^{\tau}(\hat{n}, d) \equiv \Pi_{\mu\nu}(\hat{n}) S \Pi_{\rho\sigma}(\hat{m}) S^{\dagger} \quad (3.53)$$

Le orientazioni relative diverse che le due plaquettes possono assumere sono in tutto sei e le riportiamo in figura 3.8 dove abbiamo fissato ad essere in direzione (1) il trasporto parallelo. In particolare nel quarto e sesto disegno (rispettivamente $M_{12;34}^1(\hat{n}, d)$ e $M_{23;34}^1(\hat{n}, d)$) abbiamo usato due sistemi di riferimento orientati diversamente, uno in $\hat{n}$ e l'altro in $\hat{m}$, nell'impossibilità di disegnare quattro dimensioni.

Abbiamo deciso di calcolare questi cammini con l'intenzione di applicarci poi il parametro Ξ . Supponiamo infatti di avere un istantone nell'insieme di Diakonov, con centro molto prossimo ad $\hat{n}$. Se d è molto piccolo (in rapporto al size ρ), un tipico cammino tra quelli appena illustrati si troverà immerso dentro l'istantone, il quale, come abbiamo più volte sottolineato, darà luogo ad un campo di gauge appartenente all'algebra di $SU(2)$, che è come dire che i links in prossimità del suo centro saranno appartenenti ad $SU(2)$.

Abbiamo distinto la regione vicina al centro dell'istantone da quella lontana poiché nel primo caso il campo dominante sarà proprio quello di tale p.p.

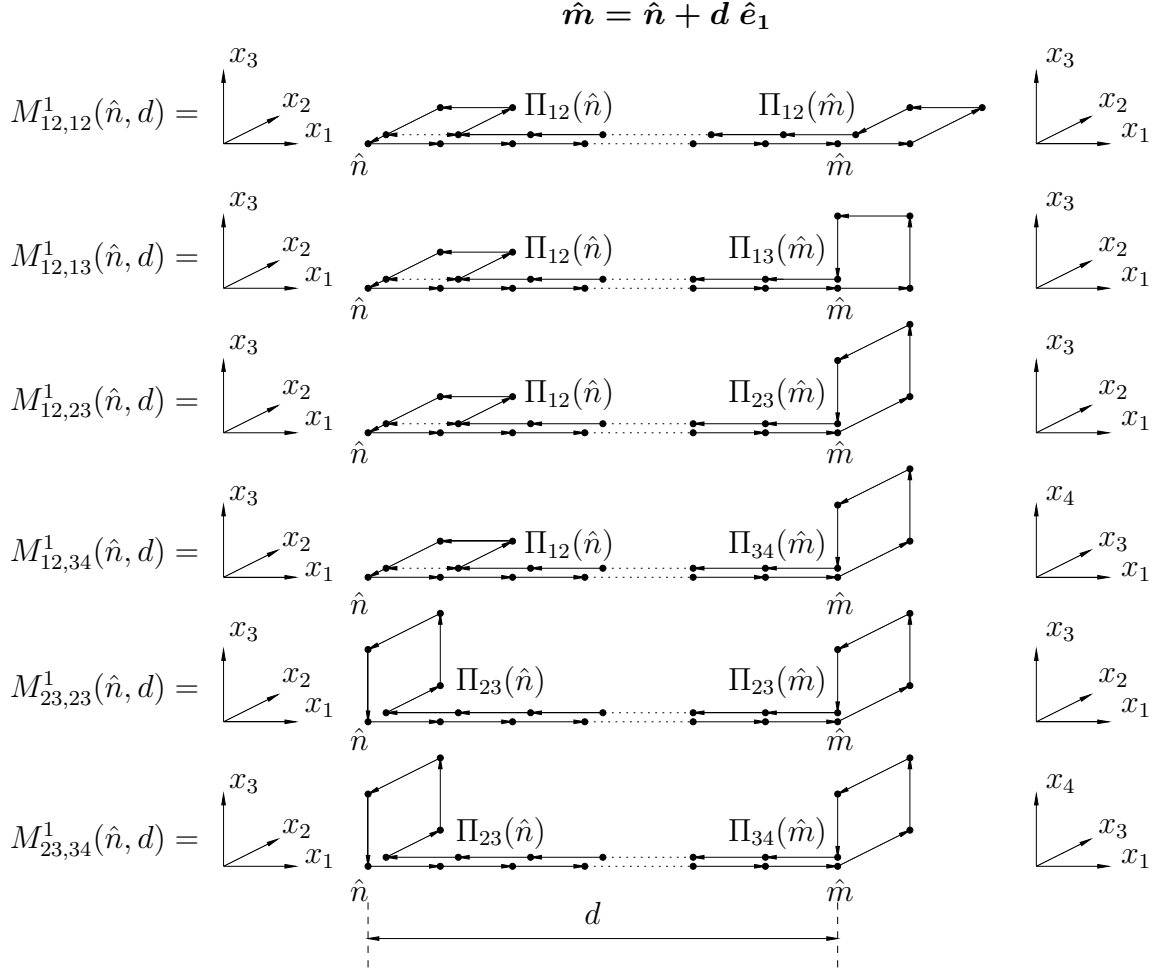


Figura 3.8: Rappresentazione grafica dei sei tipi di $M_{\mu\nu;\rho\sigma}^{\tau}(\hat{n}, d)$

(ricordiamo che avvicinandosi al centro la grandezza dei campi di gauge diventa considerevole e quindi, con l'ipotesi di “sum ansatz” che abbiamo fatto, i contributi dovuti alle altre p.p. diventano trascurabili). Chiaramente, fermo rimanendo il $\hat{n}$ vicino al centro, la situazione sarà ben diversa quando $\hat{m}$ si sposterà andando magari dentro il raggio di un altro istantone. In quest'ultimo caso i contributi di tutti i links componenti il cammino porteranno $M_{\mu\nu;\rho\sigma}^{\tau}(\hat{n}, d)$ fuori da un sottogruppo $SU(2)$.

Tutto questo può esserci mostrato dal parametro Ξ .

L'idea è quella di indagare tramite questo parametro su configurazioni contenenti p.p., con la speranza di ottenere una qualche evidenza su medie realizzate mediante il modello fin qui sviluppato, ossia medie su stati di vuoto della teoria

(sempre nella misura in cui il modello di Diakonov si possa considerare una sufficiente approssimazione della QCD).

Realizzazione operativa delle misure

Se fin qui abbiamo sviluppato un programma capace di generare reticoli corrispondenti ad insiemi di Diakonov, ora necessitiamo di un altro programma capace di realizzare i cammini, calcolare il valore di Ξ su ognuno di essi e realizzare la statistica. Riportiamo la procedura che abbiamo seguito. Per prima cosa si individua una direzione lungo cui fare il trasporto parallelo, diciamo la direzione (1).

Tre indici (n_2, n_3, n_4) inizieranno un ciclo di percorrimiento sul bordo del reticolo ortogonale alla direzione (1) all'interno del quale annidiamo un altro ciclo su n_1 che servirà a costruire una matrice 4-dimensionale O (di dimensioni $5 \times a_s \times 3 \times 3$) che qui riportiamo:

$$O \equiv \begin{pmatrix} \Pi_{12}(\hat{n}) & \Pi_{12}(\hat{n} + \hat{e}_1) & \cdots & \Pi_{12}(\hat{n} + (a_s - 2)\hat{e}_1) & \Pi_{12}(\hat{n} + (a_s - 1)\hat{e}_1) \\ \Pi_{13}(\hat{n}) & \Pi_{13}(\hat{n} + \hat{e}_1) & \cdots & \Pi_{13}(\hat{n} + (a_s - 2)\hat{e}_1) & \Pi_{13}(\hat{n} + (a_s - 1)\hat{e}_1) \\ \Pi_{23}(\hat{n}) & \Pi_{23}(\hat{n} + \hat{e}_1) & \cdots & \Pi_{23}(\hat{n} + (a_s - 2)\hat{e}_1) & \Pi_{23}(\hat{n} + (a_s - 1)\hat{e}_1) \\ \Pi_{34}(\hat{n}) & \Pi_{34}(\hat{n} + \hat{e}_1) & \cdots & \Pi_{34}(\hat{n} + (a_s - 2)\hat{e}_1) & \Pi_{34}(\hat{n} + (a_s - 1)\hat{e}_1) \\ U_1(\hat{n}) & U_1(\hat{n} + \hat{e}_1) & \cdots & U_1(\hat{n} + (a_s - 2)\hat{e}_1) & U_1(\hat{n} + (a_s - 1)\hat{e}_1) \end{pmatrix}$$

Con $\hat{n}$ abbiamo voluto intendere il quadrivettore $(0, n_2, n_3, n_4)$. Finito questo ciclo iniziamone altri due annidati: un indice n_1^a (più esterno) ed uno n_1^b interno; il primo da 0 ad $(a_s - 1)$, il secondo da n_1^a ad $(a_s - 1)$. Creiamo la matrice identità e mettiamola in una variabile S dopodiché calcoliamo tutti i possibili

$$\Xi_{\mu\nu;\rho\sigma}^1(\hat{n}, 0) \equiv \Xi [M_{\mu\nu;\rho\sigma}^1(\hat{n}, 0)] = \Xi [\Pi_{\mu\nu}(\hat{n}) S \Pi_{\rho\sigma}(\hat{n}) S^\dagger] \quad (3.54)$$

della figura 3.8. In generale l'espressione sarà

$$\Xi_{\mu\nu;\rho\sigma}^1(\hat{n} + n_1^a \hat{e}_1, n_1^b - n_1^a) \equiv \Xi [\Pi_{\mu\nu}(\hat{n} + n_1^a \hat{e}_1) S \Pi_{\rho\sigma}(\hat{n} + n_1^b \hat{e}_1) S^\dagger] \quad (3.55)$$

Definiamo anche una nuova quantità

$$\Xi^1(\hat{q}, d) \equiv \sum_{\{\mu\nu;\rho\sigma\}=\{12;12\},\{12;13\},\{12;23\},\{12;34\},\{23;23\},\{23;34\}} \frac{\Xi_{\mu\nu;\rho\sigma}^1(\hat{q}, d)}{6} \quad (3.56)$$

ossia la media. A questo punto, mandando $S \rightarrow S U_1(\hat{n} + n_1^b \hat{e}_1)$ e quindi incrementando n_1^b di una unità possiamo riapplicare le (3.55–3.56) per ottenere

questa volta $\Xi_{\mu\nu;\rho\sigma}^1(\hat{n}, 1)$ e $\Xi^1(\hat{n}, 1)$.

Andando avanti in questo modo calcoleremo le $\Xi_{\mu\nu;\rho\sigma}^1(\hat{n}, d)$ e $\Xi^1(\hat{n}, d)$ su tutta la linea utilizzando quindi una alla volta tutte le colonne di O . Abbiamo così la possibilità di graficare queste sette quantità in funzione della distanza d tra le due plaquettes.

Valori medi di $\Xi_{\mu\nu;\rho\sigma}^1(d)$ e $\Xi^1(d)$ sulla linea.

Il passo successivo può essere quello di vedere quali sono i valori medi di $\langle \Xi_{\mu\nu;\rho\sigma}^1(\hat{n}, d) \rangle_{\hat{n}}$ e $\langle \Xi^1(\hat{n}, d) \rangle_{\hat{n}}$ con $\hat{n}$ che si muove sulla linea individuata da (n_1, n_2, n_3) . Per far questo non abbiamo che da incrementare il valore di n_1^a con l'accortezza di far entrare nella stessa statistica le Ξ corrispondenti ad una stessa distanza d . Quando il ciclo di n_1^a sarà terminato avremo le $\Xi(d)$ mediate su tutta la linea.

Valori medi di $\Xi_{\mu\nu;\rho\sigma}^1(d)$ e $\Xi^1(d)$ su tutto il reticolo

Ancora una volta non faremo altro che completare i cicli annidati in (n_2, n_3, n_4) cumulando i dati (le Ξ e $\Xi_{\mu\nu;\rho\sigma}^1$) relativi agli stessi valori di distanza d .

Utilizzo di altre direzioni per il trasporto parallelo

È possibile ampliare ancora di più la statistica valutando le Ξ fin qui utilizzate in direzioni diverse dalla (1). Per far ciò basterà fare una rotazione del reticolo (ossia una permutazione delle coordinate) e ripetere la procedura.

A questo punto, conviene fare due considerazioni:

- abbiamo finora detto che i cicli sui vari indici $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_1^a, n_1^b)$ spaziano su tutto il reticolo. Però è ovvio che, ad esempio per $n_1^b = a_s - 1$ (ossia quando nella direzione (1) siamo arrivati al bordo) non potremo calcolare plaquettes della forma $\Pi_{1\nu}$. In questo caso il programma passa oltre e nessun errore si verifica;
- i dati fin qui raccolti saranno correlati. Stiamo infatti misurando le nostre quantità sempre sulla stessa configurazione ed è impensabile che tra links vicini non vi possa essere correlazione.

Per ovviare a questo ultimo inconveniente si può ampliare una volta in più la statistica cumulando i dati raccolti con quelli acquisibili in altre configurazioni. Per come è stato costruito l'insieme di Diakonov (la distribuzione delle p.p. è completamente random) configurazioni diverse saranno sicuramente scorrelate fra loro. Per evitare di sottostimare l'errore dei nostri risultati faremo in

questo caso un blocking sulle configurazioni, ossia solo i valori mediati su una configurazione entreranno in una statistica con quelli mediati su altre.

3.2.4 I nostri risultati

Singolo istantone

Abbiamo posto un istantone, di raggio $\rho = 5a$, orientazione casuale e centro esterno di un lattice spacing dal bordo di un reticolo $16 \times 11 \times 2^2$. Le misure sono state prese sulla linea passante per il suo centro. Nella figura 3.9 è riportato il grafico delle $\Xi_{\mu\nu;\rho\sigma}^1(\hat{0}, d)$ e $\Xi^1(\hat{0}, d)$, nonché una rappresentazione visiva dell'istantone.

Come ci aspettiamo i valori delle Ξ vengono ovunque molto prossimi a 2 (le piccole fluttuazioni del grafico sono da interpretare in rapporto alla scala delle ordinate, molto espansa rispetto alla normale variabilità del parametro).

Coppia istantone–antiistantone (I–AI)

In questo caso abbiamo preso un istantone ed un antiistantone posti esternamente ai lati opposti del reticolo dimensionato come nel caso precedente, entrambi a distanza un lattice spacing dal bordo ($\rho = 5a$ per entrambi). L'esperimento è stato condotto con le stesse modalità del precedente, ma la statistica è stata ampliata a 2500 configurazioni. In pratica, in ognuna di queste, abbiamo mantenuto invariata l'orientazione dell'istantone mentre generavamo quella dell'antiistantone in maniera casuale. Con le $\Xi_{\mu\nu;\rho\sigma}^1(\hat{0}, d)$ (in grigio) e la $\Xi^1(\hat{0}, d)$ (in nero) abbiamo costruito il grafico in alto nella figura 3.10. Si può notare come all'aumentare della distanza tra le plaquettes (ricordiamo che la prima era fissa, solo la seconda si spostava) il parametro tende ad assumere valori via via crescenti, allontanandosi dal valore tipico dei sottogruppi $SU(2)$.

Abbiamo poi ripetuto l'esperimento ma su rette parallele a quella congiungente i centri delle p.p., a distanze crescenti ($1a, 2a, 3a, 4a$) da essa. Gli andamenti delle $\Xi^1(\hat{p}_i, d)$ sono riportate nel grafico in basso nella figura 3.10.

Purtroppo abbiamo ottenuto andamenti così regolari solo finché abbiamo tenuto la prima plaquette fissata in prossimità dell'istantone. Già il tentativo di mediare le Ξ solo sulla linea congiungente i centri ha notevolmente appiattito l'andamento del parametro. In particolare l'esperimento è stato condotto su 12 configurazioni ed i grafici in figura 3.11 riportano le medie $\Xi_{\mu\nu;\rho\sigma}^1(d)$ e $\Xi^1(d)$.

Un altro elemento che sembra compromettere un andamento regolare delle Ξ

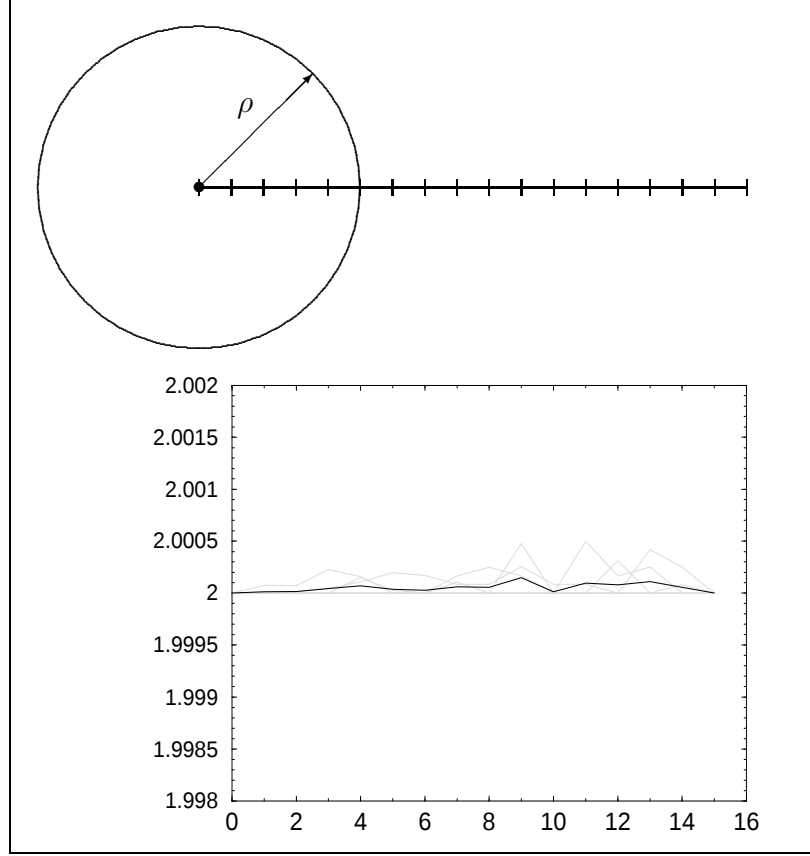


Figura 3.9: Singolo istantone. Nel grafico sono riportate in ordinata le sei $\Xi^1_{\mu\nu;\rho\sigma}(\hat{0}, d)$ (in grigio) e la $\Xi^1(\hat{0}, d)$ (in nero). Sull'ascissa sta la distanza dal bordo del reticolo in unità di lattice spacing.

sono le fluttuazioni quantistiche. Abbiamo introdotto le fluttuazioni facendo delle sweeps sui reticoli realizzati (fissando ovviamente dei β). Abbiamo preso come reticolo da testare uno di quelli trattati in precedenza, con istantone ed antiistantone fuori dal reticolo (con i centri esterni di un lattice spacing ai lati opposti del reticolo). Abbiamo misurato le Ξ nella modalità utilizzata all'inizio, ossia mantenendo fissa al bordo del reticolo la prima plaquette e muovendo l'altra. Abbiamo ripetuto le misure ogni 2 sweeps, fino ad arrivare a 12, con 2 diversi β :

- $\beta = 6.10$ ($a = 0.0874$ fm)
- $\beta = 6.00$ ($a = 0.1030$ fm)

I grafici in figura 3.12 mostrano come aumentando il numero di sweeps, le Ξ convergano verso il valor medio su $SU(3)$ a tutte le distanze d .

Terminiamo questo lavoro riportando la media dei parametri Ξ considerati finora non più su particolari configurazioni studiate “ad hoc” ma sull’insieme di Diakonov, o meglio su 12 configurazioni di Diakonov. Il grafico riportato in figura 3.13, risulta praticamente piatto.

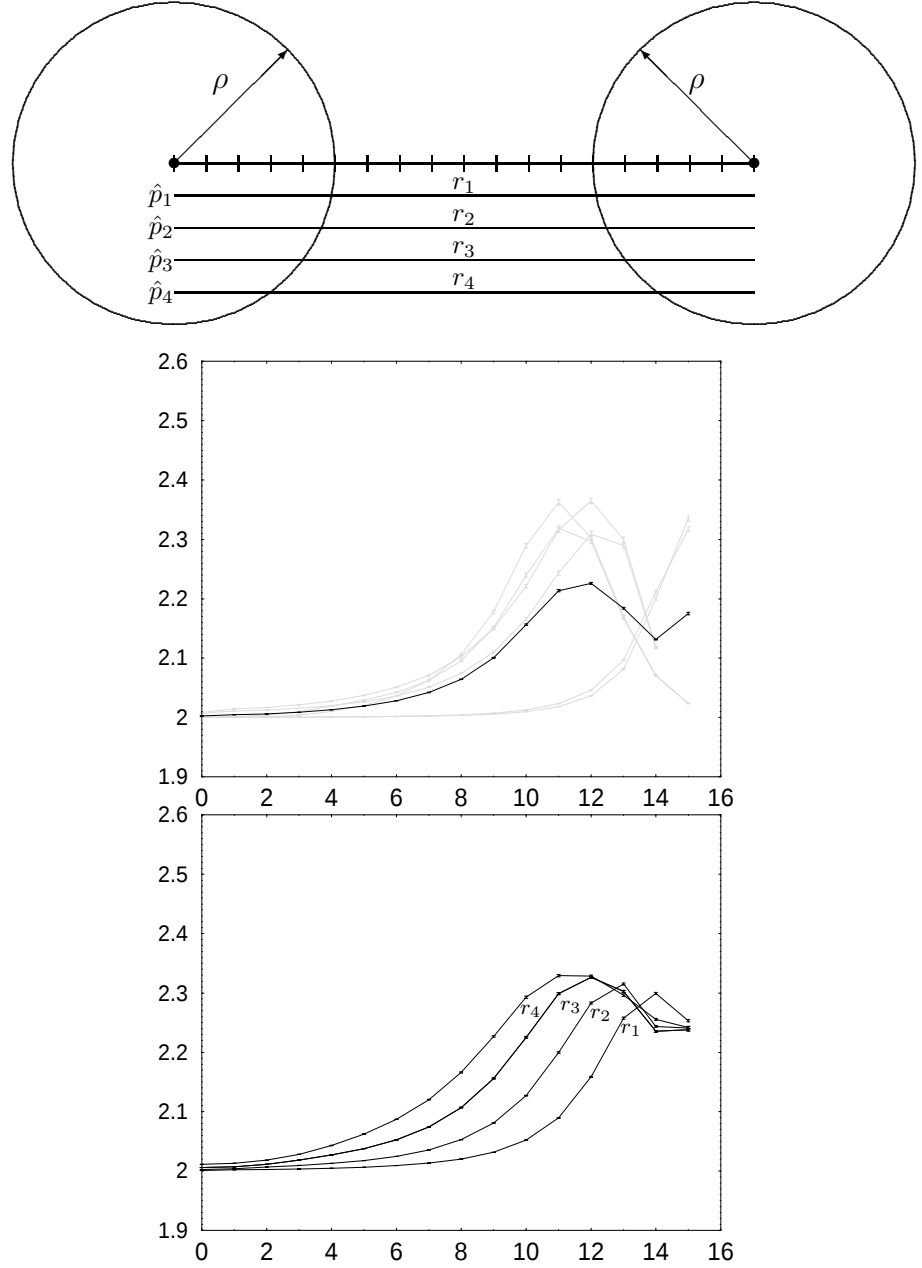


Figura 3.10: Coppia istantone anti-istantone. Sul grafico più in alto sono riportate in ordinata le sei $\Xi^1_{\mu\nu;\rho\sigma}(\hat{o}, d)$ (in grigio) e la $\Xi^1(\hat{o}, d)$ (in nero), tutte calcolate lungo la congiungente delle due p.p.. Sull'ascissa sta la distanza dal bordo del reticolo in unità di lattice spacing. Sul grafico inferiore stanno invece riportate le $\Xi^1(\hat{o}, d)$ calcolate sulle rette $\{r_i\}$ disegnate in alto.

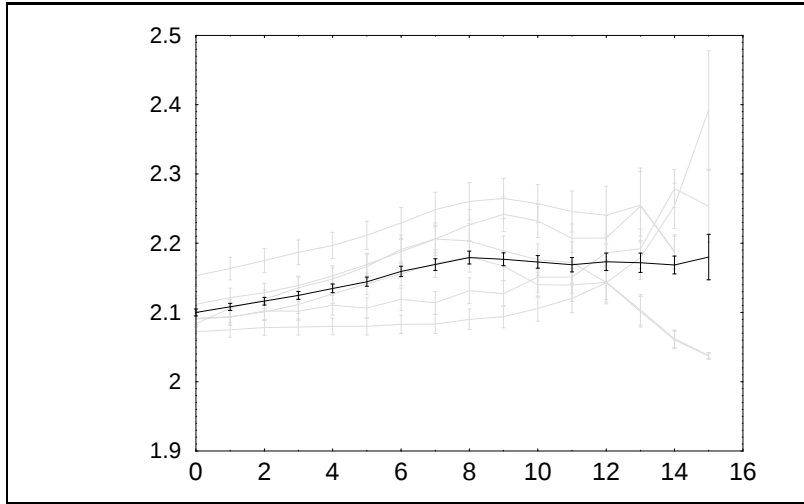
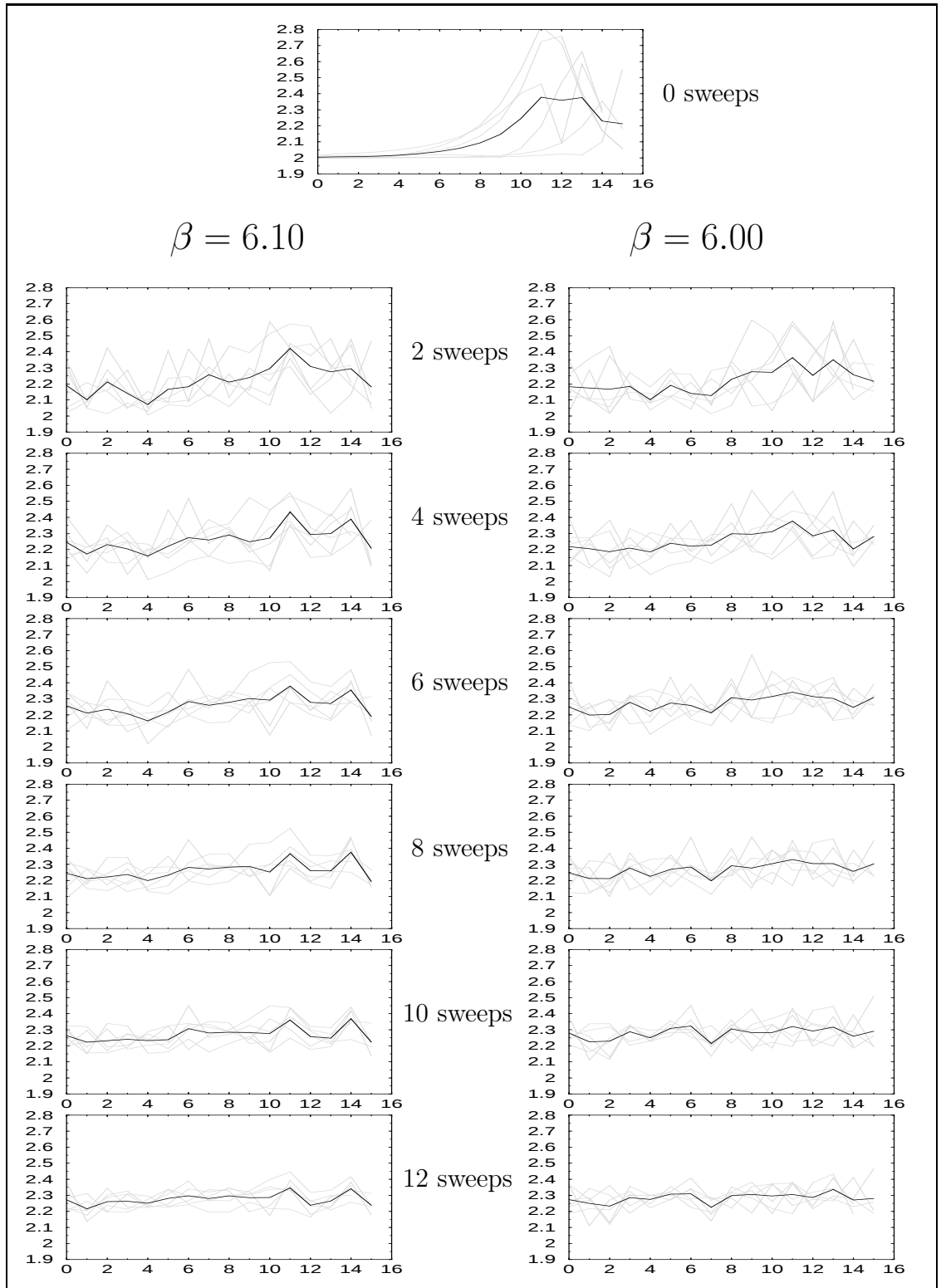


Figura 3.11: Le grandezze riportate sono ancora $\Xi_{\mu\nu;\rho\sigma}^1(\hat{0}, d)$ (in grigio) e la $\Xi^1(\hat{0}, d)$ ma mediate su tutta la linea in dodici diverse configurazioni (diverse tra loro solo per la diversa orientazione relativa delle p.p.)

Figura 3.12: Influenza delle fluttuazioni sulle $\Xi(d)$

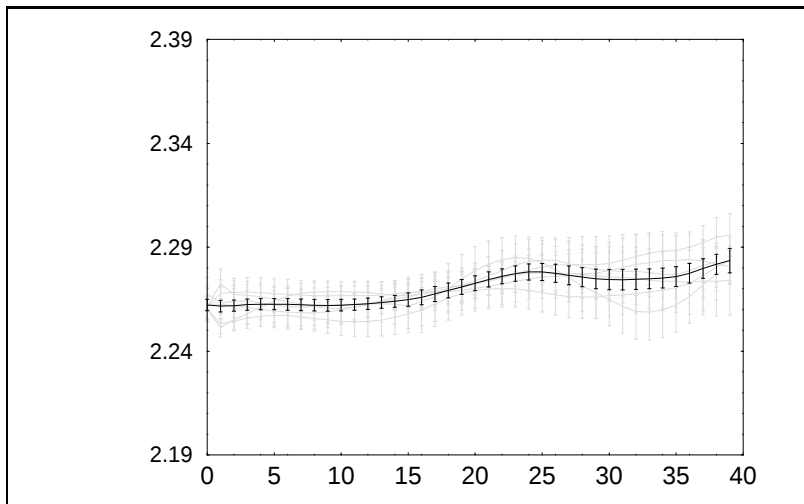


Figura 3.13: Medie delle Ξ calcolate su 12 diverse configurazioni di Diakonov

Appendice A

Il simbolo η di 't Hooft

Definizione

Il gruppo $SO(4)$ è localmente isomorfo a $SO(3) \times SO(3)$.

Il tensore antisimmetrico a 6 componenti $A_{\mu\nu} \in Alg(SO(4))$ può essere visto, in $SO(3) \times SO(3)$, come la rappresentazione $\mathbf{3} + \mathbf{3}$.

Il tensore *selfduale* $A'_{\mu\nu}$ (definito da $A'_{\mu\nu} = \tilde{A}'_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}A'_{\alpha\beta}$) trasforma in $SO(3)$ come un vettore tridimensionale $\{A'_a\}_{a=1\dots 3}$. Il tensore η definisce proprio il mapping dei vettori di $SO(3)$ nei tensori selfduali di $SO(4)$:

$$A'_{\mu\nu} = \eta_{a\mu\nu}A'_a \quad a = 1, 2, 3 \quad \mu, \nu = 1, \dots, 4 \quad (\text{A.1})$$

Analogamente il tensore $\bar{\eta}$ definisce il mapping dei vettori di $SO(3)$ nei tensori antiselfduali ($A'_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}A'_{\alpha\beta}$) di $SO(4)$.

Una definizione per η può essere data dalle proprietà di $\tau_\mu^\pm \equiv (\vec{\tau}, \mp i)$ (abbiamo indicato con $\vec{\tau}$ le matrici di Pauli) infatti :

$$\tau_\mu^+ \tau_\nu^- = \delta_{\mu\nu} + i \eta_{a\mu\nu} \tau^a \quad ; \quad \tau_\mu^- \tau_\nu^+ = \delta_{\mu\nu} + i \bar{\eta}_{a\mu\nu} \tau^a \quad (\text{A.2})$$

Le componenti possono essere definite da:

$$\eta_{a\mu\nu} = \varepsilon_{0a\mu\nu} + \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}\varepsilon_{bc\mu\nu} \quad \bar{\eta}_{a\mu\nu} = (-1)^{(\delta_{\mu 4} + \delta_{\nu 4})}\eta_{a\mu\nu} \quad (\text{A.3})$$

$$= \varepsilon_{a\mu\nu} + \delta_{a\mu}\delta_{\nu 4} - \delta_{a\nu}\delta_{\mu 4} \quad = \varepsilon_{a\mu\nu} - \delta_{a\mu}\delta_{\nu 4} + \delta_{a\nu}\delta_{\mu 4} \quad (\text{A.4})$$

Più esplicitamente:

$$\eta_{a\mu\nu} = \begin{cases} \varepsilon_{a\mu\nu} & , & \mu, \nu & = & 1, 2, 3 \\ \delta_{a\mu} & , & \nu & = & 4 \\ -\delta_{a\nu} & , & \mu & = & 4 \\ 0 & , & \mu = \nu & = & 4 \end{cases} \quad \text{mentre} \quad \bar{\eta}_{a\mu\nu} = \begin{cases} \varepsilon_{a\mu\nu} \\ -\delta_{a\mu} \\ \delta_{a\nu} \\ 0 \end{cases}$$

Proprietà

Antisimmetria:

$$\eta_{a\mu\nu} = -\eta_{a\nu\mu} \quad (\bar{\eta}_{a\mu\nu} = -\bar{\eta}_{a\nu\mu}) \quad (\text{A.5})$$

Selfdualità – anti-selfdualità:

$$\eta_{a\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \eta_{a\alpha\beta} \quad \bar{\eta}_{a\mu\nu} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \bar{\eta}_{a\alpha\beta} \quad (\text{A.6})$$

Relazioni utili coinvolgenti la η di 't Hooft:

$$\eta_{a\mu\nu} \eta_{a\rho\sigma} = \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho} + \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (\text{A.7})$$

$$\eta_{a\mu\nu} \eta_{a\mu\rho} = 3 \delta_{\nu\rho} \quad (\text{A.8})$$

$$\eta_{a\mu\nu} \eta_{a\mu\nu} = 12 \quad (\text{A.9})$$

$$\eta_{a\mu\nu} \eta_{b\mu\nu} = 4 \delta_{ab} \quad (\text{A.10})$$

$$\eta_{a\mu\nu} \eta_{b\mu\rho} = \delta_{ab} \delta_{\nu\rho} + \varepsilon_{abc} \eta_{c\nu\rho} \quad (\text{A.11})$$

$$\eta_{a\rho\lambda} \varepsilon_{\sigma\mu\nu\lambda} = \delta_{\rho\sigma} \eta_{a\mu\nu} + \delta_{\rho\nu} \eta_{a\sigma\mu} + \delta_{\rho\mu} \eta_{a\nu\sigma} \quad (\text{A.12})$$

$$\varepsilon_{abc} \eta_{b\mu\nu} \eta_{c\rho\sigma} = \delta_{\mu\rho} \eta_{a\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma} \eta_{a\nu\rho} - \delta_{\nu\rho} \eta_{a\mu\sigma} + \delta_{\nu\sigma} \eta_{a\mu\rho} \quad (\text{A.13})$$

Le stesse equazioni qui date per la η valgono anche per la $\bar{\eta}$ a patto di effettuare le sostituzioni: $\eta_{a\mu\nu} \longrightarrow \bar{\eta}_{a\mu\nu} \quad \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \longrightarrow -\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$.

Utili relazioni che coinvolgono la η e la $\bar{\eta}$ sono

$$\eta_{a\mu\nu} \bar{\eta}_{b\mu\nu} = 0 \quad (\text{A.14})$$

$$\eta_{a\mu\nu} \bar{\eta}_{b\mu\rho} = \eta_{a\mu\rho} \bar{\eta}_{b\mu\nu} \quad (\text{A.15})$$

Equazioni di contrazione del tensore $G_{\mu\nu}$

Ricordiamo l'espressione data per $G_{\mu\nu}^a$ in gauge singolare data nella 2.1.2 Servendoci della (2.18) e delle equazioni riportate in questa appendice, possiamo calcolare:

$$\begin{aligned} \sum_a G_{\mu\nu}^a G_{\rho\sigma}^a = & \frac{16\rho^4}{(x^2 + \rho^2)^4} \left\{ \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho} + \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} + \right. \\ & \left. + \frac{2}{x^2} (\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} x_{\lambda\sigma} + \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} x_{\lambda\rho} + \varepsilon_{\mu\lambda\rho\sigma} x_{\lambda\nu} + \varepsilon_{\lambda\nu\rho\sigma} x_{\lambda\mu}) \right\} \quad (\text{A.16}) \end{aligned}$$

In particolare

$$\sum_a G_{\mu\nu}{}^a G_{\mu\nu}{}^a = \frac{16\rho^4}{(x^2 + \rho^2)^4} \{1 - \delta_{\mu\nu}\} \quad (\text{A.17})$$

da cui

$$\sum_{a,\mu,\nu} G_{\mu\nu}{}^a G_{\mu\nu}{}^a = \frac{192\rho^4}{(x^2 + \rho^2)^4} \quad (\text{A.18})$$

ossia la (2.19)

Appendice B

Le funzioni $D(x)$ e $d(x)$ di Diakonov

Definizione

Indichiamo con $d(x)$ la funzione della quale ci siamo serviti nel modello di Diakonov come funzione della densità istantonica e con $D(x)$ il suo integrale. La variabile x sta qui ad indicare il rapporto adimensionale $\frac{\rho}{\rho_1}$.

Riportiamo di seguito espressioni di $D(x)$, $x(D)$ (la sua inversa) e $d(x)$:

$$D(x) \equiv \frac{x^{b-4}}{(1+x^{\alpha-1})^q} \quad (\text{B.1})$$

$$x(D) = (D^{-p} - 1)^{-\frac{1}{\alpha-1}} = \frac{D^{\frac{1}{b-4}}}{(1-D^p)^{\frac{1}{\alpha-1}}} \quad (\text{B.2})$$

$$d(x) \equiv D'(x) = (b-4) \frac{x^{b-5}}{(1+x^{\alpha-1})^{q+1}} = \frac{(b-4)x^{b-5}}{(1+x^{\alpha-1})^{\frac{b-5+\alpha}{\alpha-1}}} \quad (\text{B.3})$$

I parametri da cui le due funzioni dipendono sono:

$\mathbf{b} = \frac{11}{3}N_c$, essenzialmente il primo coefficiente della β -function;

$\mathbf{N}_c$, il numero di colori della teoria: nel presente lavoro abbiamo considerato casi con $N_c \in \{2, 3\}$;

α , esponente che determina l'andamento asintotico della $d(x)$ per $x \rightarrow \infty$: sono stati presi in considerazione $\alpha \in \{3, 5\}$;

$\mathbf{p} \equiv \frac{\alpha-1}{b-4}$ e $\mathbf{q} \equiv \frac{1}{p} = \frac{b-4}{\alpha-1}$, parametri introdotti per comodità di scrittura di molti sviluppi algebrici ($p \in [\frac{2}{7}, \frac{6}{5}]$ e $q \in [\frac{5}{6}, \frac{7}{2}]$).

$d(x)$ equivale al rapporto $\frac{d(\rho)}{\rho^5}$ nella (2.50); nel resto di questa appendice studieremo le proprietà di questa distribuzione che riportiamo, unitamente con la $D(x)$, in figura B.1.

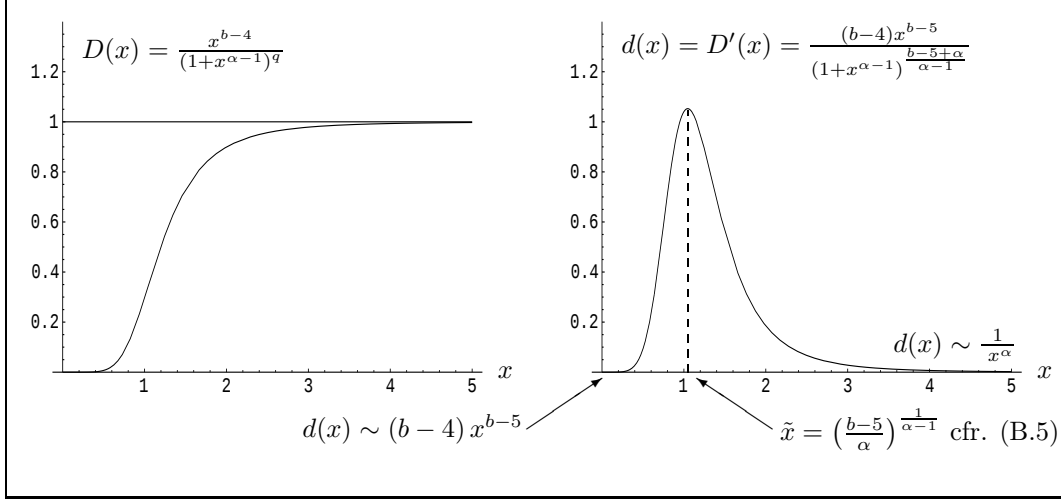


Figura B.1: Rappresentazione grafica delle $D(x)$ e $d(x)$ di Diakonov.

Limiti asintotici e normalizzazione

Come evidente dalla (B.3) si ha

$$d(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \quad \text{come} \quad (b-4)x^{b-5} \sim \frac{1}{\rho^5} \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^b$$

ossia la (2.54) è rispettata. Sempre la (B.3) ci mostra che

$$d(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0 \quad \text{come} \quad \frac{1}{x^\alpha}$$

L'andamento decrescente è atteso dalla teoria: grandi size implicano infatti una grande azione di interazione tra le p.p. e quindi una forte soppressione di queste configurazioni dagli integrali funzionali. Sebbene atteso non è facile stimare l'esatto andamento a grandi ρ . Varie ipotesi sono state fatte in proposito ed in questa casistica il modello di Diakonov studia proprio $\frac{1}{x^\alpha}$.

Per quanto riguarda la normalizzazione ci aspettiamo:

$$\frac{dn_I}{d^4x} = \int_0^\infty d(x) dx = D(\infty) - D(0) = 1$$

ossia la $d(x)$ è già normalizzata a uno. Qualora si vogliano studiare densità $\frac{dn_I}{d^4x}$ diverse basterà mettere il valore desiderato a fattore della $d(x)$.

Studio della derivata

$$d'(x) = \frac{(b-4)}{1+x^{\alpha-1}} d(x) [(b-5) - \alpha x^{\alpha-1}] \quad (\text{B.4})$$

Il massimo della $d(x)$ si ha dunque in corrispondenza della radice di $d'(x)$ in

$$\tilde{x} = \left(\frac{b-5}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \quad (\text{B.5})$$

Finora abbiamo scritto $d\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)$ senza specificare niente su ρ_1 . Se chiamiamo ρ_0 il ρ in corrispondenza al quale si presenta il massimo, avremo

$$\begin{aligned} \frac{\rho_0}{\rho_1} &= \tilde{x} && \text{ossia} \\ \rho_1 &= \rho_0 \left(\frac{\alpha}{b-5} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Questo è proprio quanto realizzato dalla procedura di Diakonov. Fissati N_c (dal gruppo in esame) ed α , si sceglie un ρ_0 in cui si desidera il picco della $d(\rho)$, quindi tramite la (B.6) si calcola ρ_1 e dunque

$$D(\rho) \equiv \frac{\rho^{b-4}}{(\rho_1^{\alpha-1} + \rho^{\alpha-1})^q} \quad (\text{B.7})$$

$$\rho(D) = \rho_1 (D^{-p} - 1)^{-\frac{1}{\alpha-1}} = \rho_1 \frac{D^{\frac{1}{b-4}}}{(1 - D^p)^{\frac{1}{\alpha-1}}} \quad (\text{B.8})$$

Il programma generatore di configurazioni usa proprio le (B.7–B.8), come riportato a pag. (??)

D'ora in poi ci riferiremo alla $d(\rho)$ utilizzando come parametro ρ_0 anziché ρ_1 .

Studio dei momenti della distribuzione

Per calcolare le grandezze statistiche caratteristiche della $d(\rho)$ (media, varianza etc.) dobbiamo saper calcolare

$$\begin{aligned}
 I_k &\equiv \int_0^\infty x^k d(x) dx \\
 &= (b-4) \int_0^\infty \frac{x^{b-5+k}}{(1+x^{\alpha-1})^{\frac{b-5+\alpha}{\alpha-1}}} dx \\
 &= \frac{b-4}{\alpha-1} \int_0^\infty \frac{x^{b-5+k+2-\alpha}}{(1+x^{\alpha-1})^{\frac{b-5+\alpha}{\alpha-1}}} ((\alpha-1) x^{\alpha-2} dx) \\
 &= q \int_0^\infty \frac{t^{\frac{b-3+k-\alpha}{\alpha-1}}}{(1+t)^{\frac{b-5+\alpha}{\alpha-1}}} dt \quad (t \equiv x^{\alpha-1}) \\
 &= q \int_0^\infty \frac{t^{n-1}}{(1+t)^{m+n}} dt \quad \text{con} \quad \begin{cases} n = q + \frac{k}{\alpha-1} = \frac{b-4+k}{\alpha-1} \\ m = 1 - \frac{k}{\alpha-1} = \frac{\alpha-1-k}{\alpha-1} \end{cases} \\
 &= q B(n, m)^1
 \end{aligned} \tag{B.9}$$

cioè

$$I_k = \frac{\Gamma(\frac{k}{\alpha-1} + q) \Gamma(1 - \frac{k}{\alpha-1})}{p \Gamma(q+1)} = \frac{\Gamma(\frac{k}{\alpha-1} + q) \Gamma(1 - \frac{k}{\alpha-1})}{\Gamma(q)} \tag{B.10}$$

Abbiamo usato $\Gamma(z+1) = z \Gamma(z)$. Mediante la (B.10) è possibile calcolare

$$\begin{aligned}
 \langle \rho \rangle &= \rho_1 I_1 \\
 \sigma_\rho &= \rho_1 \sqrt{\langle \rho^2 \rangle - \langle \rho \rangle^2} = \rho_1 \sqrt{I_2 - I_1^2}
 \end{aligned}$$

Un'altra grandezza che possiamo valutare è ρ_{med} (ρ -mediano), definito da

$$\int_0^{\rho_{\text{med}}} d(\rho) d\rho = \int_{\rho_{\text{med}}}^\infty d(\rho) d\rho = \frac{1}{2}$$

Tramite la (B.8) si ottiene

$$\rho_{\text{med}} = \rho_1 (2^p - 1)^{-\frac{1}{\alpha-1}} = \left(\frac{\alpha}{(b-5)(2^p-1)} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \tag{B.11}$$

¹ $B(n, m) \equiv \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)}$ dove compare la funzione trascendente Γ di Eulero.

Riportiamo nella sottostante tabella i valori numerici approssimati delle grandezze considerate finora nei casi $N_c \in \{2, 3\}$ e $\alpha \in \{3, 5\}$ come multipli di ρ_0 :

N_c	b	α	$\frac{\rho_1}{\rho_0}$	$\frac{\rho_{\text{med}}}{\rho_0}$	$\frac{\langle \rho \rangle}{\rho_0}$	$\frac{\sigma_\rho}{\rho_0}$
2	$\frac{22}{3}$	3	1.133 893...	1.578 944...	2.409 602...	∞
2	$\frac{22}{3}$	5	1.209 897...	1.133 653...	1.258 679...	0.684 332...
3	11	3	0.707 107...	1.510 948...	2.262 742...	∞
3	11	5	0.955 443...	1.144 318...	1.273 924...	0.609 742...

Tabella B.1: Valori numerici di parametri e grandezze statistiche nella $d(x)$ di Diakonov

Conclusioni

La conoscenza del vuoto di una teoria contiene tutte le informazioni fisiche sul sistema. Un tentativo interessante per descrivere il vuoto della QCD è stato storicamente quello di modellarlo con un insieme di pseudoparticelle (istantoni). Gli istantoni sono soluzioni classiche delle equazioni di moto con azione finita. Il tentativo si è rivelato meno valido delle aspettative, ma è comunque interessante esplorare il comportamento di pseudoparticelle dello stato fondamentale. In particolare conoscere il peso delle configurazioni istantoniche, il raggio medio degli istantoni e le loro distanze medie, possibilmente senza introdurre procedure, come il cooling che le modificano.

L'idea di base è di esplorare sulle configurazioni le proprietà che distinguono l'istantone; in particolare quella di essere una configurazione di $SU(2)$. Tale caratteristica si manifesta nell'essere reale la traccia di un qualunque trasporto parallelo. Un trasporto come quello usato (vedi fig. 3.8) dovrebbe essere dominato da $SU(2)$ per distanze piccole rispetto al raggio di un istantone o alle distanze medie tra due istantoni. Una misura di tale operatore potrebbe fornire informazioni su tali grandezze, se le fluttuazioni quantistiche non sono dominanti. Abbiamo verificato tale possibilità sull'insieme di Diakonov [34], che non è la QCD ma fornisce un modello di prova. Abbiamo imparato che, se su un singolo istantone l'approccio funziona, in presenza di due istantoni o di fluttuazioni quantistiche, l'operatore usato è "entropico" nel senso che tutte le regioni dello spazio vengono pesate ugualmente, ma quelle interagenti sono solo in vicinanza degli istantoni. L'approccio va pertanto perfezionato inventando osservabili diverse, o pesi diversi nello spazio-tempo, va verificato su altri insiemi (ad esempio quello di Shuryak [23]), e finalmente nelle configurazioni del reticolo.

Bibliografia

- [1] M. Gell-Mann, H. Fritzsch and H. Leutwyler, Phys. Lett. **B 74**, 365 (1973).
- [2] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **31**, 494 (1973).
- [3] M. Gell-Mann, Phys. Lett. **8**, 214 (1964).
- [4] Taizo Muta, *Foundation of Quantum Chromodynamics*, World Scientific, 1987.
- [5] O. V. Greenberg, Phys. Rev. Lett. **13**, 598 (1964).
- [6] M. Y. Han and Y. Nambu, Phys. Rev. **139**, 1038 (1965).
- [7] Heinz J. Rothe, *Lattice Gauge Theories*, World Scientific, Singapore, 1992.
- [8] R. P. Feynman, Rev. Mod. Phys. **20**, 267 (1948).
- [9] A. I. Vainshtein, V. I. Zakharov, V. A. Novokinov and M. A. Shifman, Sov. Phys. Usp. **25(4)** (april 1982).
- [10] Lewis H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, 1986, Capitolo 9.
- [11] D. J. Gross and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30**, 1343 (1973).
- [12] D. J. Gross and F. Wilczek, Phys. Rev. **D 8**, 3633 (1973).
- [13] I. B. Khriplovich, Yadernaya Fizika **10**, 409 (1969).
- [14] S. Coleman and E. Weinberg, Phys. Rev. **D 7**, 1888 (1973).
- [15] H. D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30**, 1346 (1973).
- [16] K. G. Wilson, Phys. Rev. **D 8**, 3633 (1974).

- [17] K. G. Wilson, “Quantum Chromodynamics on a Lattice”, in *New Developments in Quantum Field Theory and Statistical Mechanics*, Cargèse, (1976), Plenum Press, New York.
- [18] A. Pellissetto, *Introduction to the Monte Carlo Method*, II Seminario di Fisica Teorica, Parma, 1–12 Settembre 1992.
- [19] Michael J. Creutz, *Quarks, Gluon and Lattices*, Cambridge University Press, 1983.
- [20] N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller and E. Teller, J. Chem. Phys. **21**, 1087 (1953).
- [21] Callan, C. G., R. Dashen and D. J. Gross, Phys. Rev. **D 17**, 2717 (1978).
- [22] G. 't Hooft, Phys. Rev. **D 14**, 3432 (1976).
- [23] T. Schäfer and E. V. Shuryak, “Instantons in QCD”, in *Reviews of Modern Physics*, volume 70, The American Physical Society, 1998.
- [24] C. Bernard, N. H. Christ, A. H. Guth and E. J. Weinberg, Phys. Rev. **D 16**, 2967 (1977).
- [25] C. Bernard, Phys. Rev. **D 19**, 3013 (1979).
- [26] D. I. Diakonov and V. Y. Petrov, Nucl. Phys. **B 245**, 259 (1984).
- [27] M. A. Shifman, A. I. Vainshtein and V. I. Zakharov, Nucl. Phys. **B 147**, 345,448,519 (1979).
- [28] E. V. Shuryak, *QCD Vacuum, Hadrons and the Superdense Matter*, World Scientific, Singapore, 1988.
- [29] S. Weinberg, Phys. Rev. **D 11**, 3583 (1975).
- [30] G. Veneziano, Nucl. Phys. **B 159**, 213 (1979).
- [31] E. Witten, Nucl. Phys. **B 156**, 269 (1979).
- [32] M. A. Shifman, A. I. Vainshtein and V. I. Zakharov, Phys. Lett. **B 76**, 971 (1978).
- [33] E. V. Shuryak, Nucl. Phys. **B 198**, 83 (1978).
- [34] D. I. Diakonov, Comunicazione privata con l'autore.
- [35] N. Cabibbo and E. Marinari, Phys. Lett. **B 119**, 387 (1982).

-
- [36] M. L. Metha, *Random Matrices and the Statistical Theory of Energy Levels*, Academic Press, New York, 1967.
- [37] A. Di Giacomo, *Acta Physica Slovaca* **49**, 159 (1999).

