

---

# Esplorazione di insiemi di Istantoni in QCD

---

Candidato: Valerio CAPPELLINI

Relatore: Prof. Adriano DI GIACOMO

## Sommario (1<sup>a</sup> parte)

---

- Lo stato di vuoto della QCD;
- Formulazione euclidea della QCD su reticolo;
- Soluzioni self-duali delle eq. di Yang–Mills ad azione finita (p.p.);
- Previsioni teoriche della densità di tali soluzioni nel vuoto quantistico;
- Costruzione di un modello che riproduca stati di vuoto contenenti p.p.;

## Formulazione della QCD

---

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a} + \sum_{f=1}^{N_f} \bar{\psi}_f \left( iD_\mu \gamma^\mu - m_f \right) \psi_f$$

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - ig_0 A_\mu^a T^a$$
$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_0 f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

### TRASFORMAZIONI DI GAUGE

$$\psi_f \longrightarrow \Omega \psi_f \quad \Omega = e^{-i\theta^a T^a}$$
$$A_\mu \longrightarrow \Omega A_\mu \Omega^\dagger - \frac{i}{g_0} \left( \partial_\mu \Omega \right) \Omega^\dagger$$

## Rescaling dei campi

---

$$A_\mu \rightarrow \frac{A_\mu}{g_0} \quad ; \quad \psi_f \rightarrow \frac{\psi_f}{g_0} \quad ; \quad \bar{\psi}_f \rightarrow \frac{\bar{\psi}_f}{g_0} \Rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \frac{\mathcal{L}}{g_0^2}$$

purchè

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - iA_\mu^a T^a$$
$$G_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

## Formulazione Euclidea

---

$$x_i^M = x_i^E \quad x_0^M = -ix_4^E \quad (\text{Rot. di Wick})$$

$$S^E = -iS^M [A_\mu^M(A_\mu^E), \bar{\psi}^M(\bar{\psi}^E), \psi^M(\psi^E)]$$

$$\mathcal{L}_{QCD}^E(x^E) = \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^E{}^a(x^E)G_{\mu\nu}^E{}^a(x^E) + \text{c. c. materia}$$

## QCD non perturbativa; importanza delle pseudoparticelle (p.p.)

---

- Lo stato di vuoto di una teoria contiene tutte le informazioni della teoria stessa;
- Stati di bassa energia della QCD non sono esplorabili perturbativamente;
  - Non ha senso l'espansione dei campi in onde piane (campi fortemente auto interagenti);
  - La fisica adronica è contenuta in questo settore;
- Gli istantoni rappresentano soluzioni classiche delle eq. di Yang–Mills;
- Si è tentato di sviluppare l'azione attorno alle configurazioni istantoniche.

## QCD su reticolo

---

$$x^\mu = a n^\mu \quad , \quad n^\mu \in \mathbb{N}$$

$$U(x, y) \equiv P \exp \left( i g_0 \int_x^y A_\mu(z) dz_\mu \right)$$

$$U(x, y) \longrightarrow \Omega(y) U(x, y) \Omega^\dagger(x)$$

$$U_\mu(n) \equiv U(n, n + \hat{\mu}) = e^{i g_0 a A_\mu(n)}$$

$$\Pi_{\mu\nu}(n) \equiv U_\nu^\dagger(n) U_\mu^\dagger(n + \hat{\nu}) U_\nu(n + \hat{\mu}) U_\mu(n)$$

$$\Pi_{\mu\nu}(n) \longrightarrow \Omega(n) \Pi_{\mu\nu}(n) \Omega^\dagger(n)$$

$$\begin{aligned} S_L &= \sum_{\square} S_{\square} \\ S_{\square} &= \frac{2N_c}{g_0^2} \left\{ 1 - \frac{1}{N_c} \Re[\text{Tr}(\Pi_{\mu\nu})] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle 0 | O_L[U] | 0 \rangle &= \frac{1}{Z_L} \int [dU] O_L[U] e^{-S_L[U]} \\ Z_L &= \int [dU] e^{-S_L[U]} \end{aligned}$$

## Topologia e vuoti classici

### FORMALISMO HAMILTONIANO

In gauge temporale ( $A_4 = 0$ )

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2g^2} \int d^3x (E_i^2 + B_i^2)$$

$$\begin{aligned} E_i &\equiv G_{4i} \\ B_i \equiv \tilde{G}_i &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} G_{jk} \end{aligned}$$

$A_\mu = 0$  individua una classe di equivalenza i cui elementi sono:

$$A_j = i \Omega(\vec{x}) \partial_j \Omega^\dagger(\vec{x})$$

con  $\Omega : \mathbb{R}^3 \mapsto SU(N)$  ;  $\Omega(\vec{x}) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \mathbb{I}_N$

### INDICI TOPOLOGICI

$$\begin{aligned} n_W &= \frac{1}{24\pi^2} \int d^3x \varepsilon_{ijk} \text{Tr} \left[ (\Omega^\dagger \partial_i \Omega) (\Omega^\dagger \partial_j \Omega) (\Omega^\dagger \partial_k \Omega) \right] \\ n_{CS} &= \frac{1}{16\pi^2} \int d^3x \varepsilon_{ijk} \left( A_i^a \partial_j A_k^a + \frac{1}{3} f_{abc} A_i^a A_j^b A_k^c \right) \end{aligned}$$

## Soluz. self-duali delle eq. di Yang-Mills

Definiamo *selfduali* (*anti-*) i campi  $G_{\mu\nu} = \pm \tilde{G}_{\mu\nu}$

$$Q = \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x G_{\mu\nu}^a \tilde{G}_{\mu\nu}^a$$

$$Q = n_{CS}(t = +\infty) - n_{CS}(t = -\infty)$$

$$S = \frac{8\pi^2}{g^2} |Q|$$

Una soluzione self duale ad azione minima con singolarità all infinito è:

$$A_\mu^a(x) = \frac{2 \eta_{a\mu\nu} (x_\nu - x_\nu^0)}{(x - x^0)^2 + \rho^2} \quad \text{istantone BPST}$$

cambiando gauge (gauge singolare)

$$A_\mu^a(x) = 2 \frac{(x_\nu - x_\nu^0)}{(x - x^0)^2} \frac{\bar{\eta}_{a\mu\nu} \rho^2}{(x - x^0)^2 + \rho^2}$$

la singolarità passa da infinito a  $x_\nu^0$ .

L' istantone in  $SU(N)$  è caratterizzato da  $4N$  variabili collettive:

$$x_\nu^0, \rho, + \text{ orientazione in } SU(N).$$

## Densità delle pseudo-particelle in $SU(N)$ –

Il risultato si ottiene con l'ausilio della teoria perturbativa, sviluppando l'azione attorno ai punti sella (le p.p.), regolarizzando le divergenze i.r. e u.v. ed applicando le eq. del gruppo di rinormalizzazione.

Ordine 2\_loop:

$$dn_I = \int \frac{d\rho d^4x}{\rho^5} d(\rho)$$

$$d(\rho) \equiv \frac{C_1}{(N_c - 1)! (N_c - 2)!} \left[ \frac{8\pi^2}{g_1^2(\rho)} \right]^{2N_c} e^{-\frac{8\pi^2}{g_2^2(\rho)} - C_2 N_c}$$

$$\frac{8\pi^2}{g_1^2(\rho)} = \frac{8\pi^2}{g_0^2} - \frac{11}{3} N_c \ln(M\rho)$$

$$\frac{8\pi^2}{g_2^2(\rho)} = \frac{8\pi^2}{g_1^2(\rho)} + \frac{17}{11} N_c \ln \left( 1 - \frac{11}{3} N_c \frac{g_0^2}{8\pi^2} \ln(M\rho) \right)$$

Per piccoli  $\rho$

$$\frac{dn_I}{d^4x} \sim \frac{d\rho}{\rho^5} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^b \quad \left( b = \frac{11}{3} N_c \stackrel{SU(3)}{=} 11 \right)$$

Per grandi  $\rho \Rightarrow$

$\Rightarrow$  la teoria perturbativa perde di validità

## Il modello realizzato

La procedura di Diakonov permette di assegnare le variabili collettive di  $n_{p.p.}$  p.p. ( $n_I - I$  e  $n_A - AI$ ) in un box spazio-temporale.

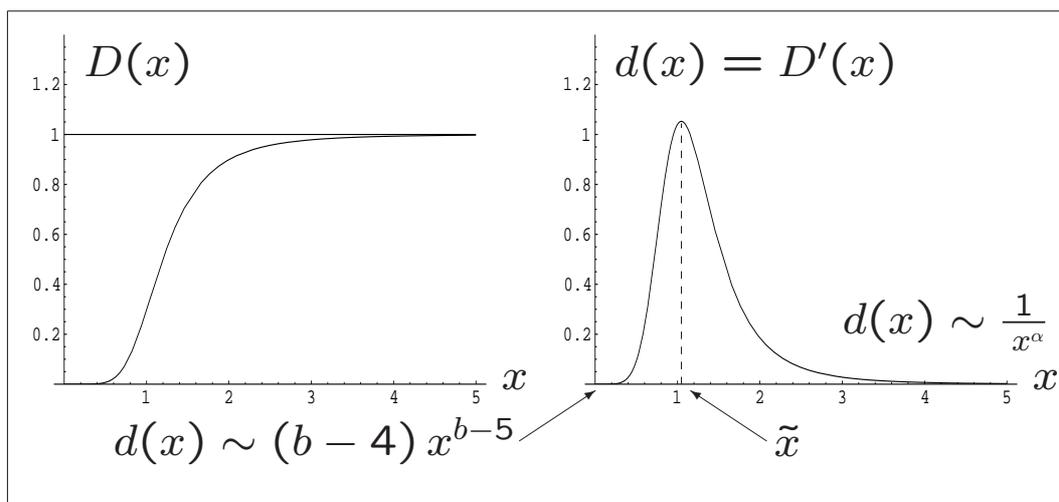
## Assegnazione dei centri dell p.p.

$$\left\{ x_i^{(j)} \right\}_{j=1, n_{p.p.}} \in \left[ -\frac{L_s}{2}, \frac{L_s}{2} \right]$$

$$\left\{ x_4^{(j)} \right\}_{j=1, n_{p.p.}} \in \left[ -\frac{L_t}{2}, \frac{L_t}{2} \right]$$

## Assegnazione dei size

La distribuzione è regolata da una funzione  $d(x)$  dove  $x \equiv \frac{\rho}{\rho_1}$  e  $\rho_1$  è relazionabile al  $\rho_0$  in corrispondenza al quale  $d(\frac{\rho_0}{\rho_1})$  ha un max.



$$D(x) \equiv \left( \frac{x}{\left(1 + x^{\alpha-1}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}} \right)^{b-4}$$

$$d(x) \equiv D'(x) = \frac{(b-4) x^{b-5}}{\left(1 + x^{\alpha-1}\right)^{\frac{b-5+\alpha}{\alpha-1}}}$$

## Orientazione in $SU(3)$

### ALGORITMO DI CABIBBO-MARINARI

$$P(U_l) = \frac{1}{Z} e^{-\beta S(U_l)} [dU_l]$$

$$Z = \int [dU_l] e^{-\beta S(U_l)}$$

$$U^{\text{old}} \rightarrow U^{\text{new}} = F U^{\text{old}}$$

$$F = f_1 f_2 f_3 \quad f_1, f_2, f_3 \in SU(2)$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & b_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ b_{31} & 0 & b_{33} \end{pmatrix},$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

La procedura è quella di ripetere l'updating del singolo link  $L$  volte prima di passare al successivo.

## DISTRIBUZIONE TEORICA

$$P_{\text{th.}}(\phi_1\phi_2\phi_3) = \frac{1}{24\pi^2} |e^{i\phi_1} - e^{i\phi_2}|^2 |e^{i\phi_1} - e^{i\phi_3}|^2 |e^{i\phi_2} - e^{i\phi_3}|^2$$

Confronto tra  $P_{\text{th.}}(\phi_1\phi_2\phi_3)$  e distribuzioni di frequenza ottenute con C.M. ( $\beta = 0$ )

	$L = 1$	$L = 10$
$N_{\text{g.d.l.}}$	1573.	1573.
$\chi^2$	1684662.	1544.
$\chi_r^2 = \frac{\chi^2}{N_{\text{g.d.l.}}}$	1070.9863	0.9818
C.L.	0.00 %	69.51 %

## Sommario (2<sup>a</sup> parte)

---

- Realizzazione di configurazioni di campo discretizzato a partire dalla conoscenza dei campi di gauge;
- Ricerca di osservabili sensibili alla presenza p.p. su reticolo;
- Indagine su reticoli contenenti particolari configurazioni di p.p.:
  - Singola pseudo-particella
  - Coppia di pseudo-particelle (con varietà di posizioni-orientazioni relative)
  - Configurazioni originate dal modello di Diakonov.
- Conclusioni

## Costruzione del reticolo

$$A_\mu^{(j)}(x) = \frac{(x_\nu - x_\nu^{(j)})}{(x - x^{(j)})^2} \frac{\bar{\eta}_{\alpha\mu\nu} \rho^{(j)2}}{(x - x^{(j)})^2 + \rho^{(j)2}} \lambda^\alpha$$

$$A_\mu^{(j)}(x) \rightarrow U^{(j)} A_\mu^{(j)}(x) U^{(j)\dagger}$$

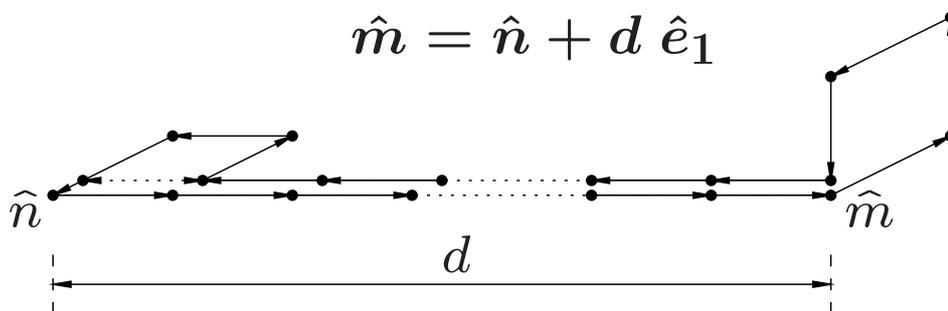
“SUM ANSATZ”

$$A_\mu(x) = \sum_{j=1}^{n_{p.p.}} A_\mu^{(j)}(x)$$

## PRODUZIONE DEI LINKS

$$U_\mu(x) = e^{i a A_\mu(x)} = F^\dagger \begin{pmatrix} e^{i a \lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i a \lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i a \lambda_3} \end{pmatrix} F$$

## Cammini reticolari analizzati



## Necessità e ricerca di un parametro adatto

---

- Le tecniche di indagine sulla presenza degli istantoni (**cooling**) intaccano di fatto le proprietà fisiche (es.:  $d(\rho)$ );
- Si ricerca un metodo di indagine non invasivo e non influenzato dalle fluttuazioni quantistiche;
- Abbiamo proposto un parametro ( $\Xi$ ) che operi su quantità gauge invarianti (i cammini reticolari chiusi).
- Le p.p. sono caratterizzate da:
  - self-dualità (o anti-self-dualità)
  - appartengono a sottogruppi  $SU(2)$  di  $SU(3)$ .
- $\Xi$  è sensibile ai sottogruppi  $SU(2)$ .

## Il parametro $\Xi$

### AUTOVALORI DI UNA MATRICE $SU(3)$

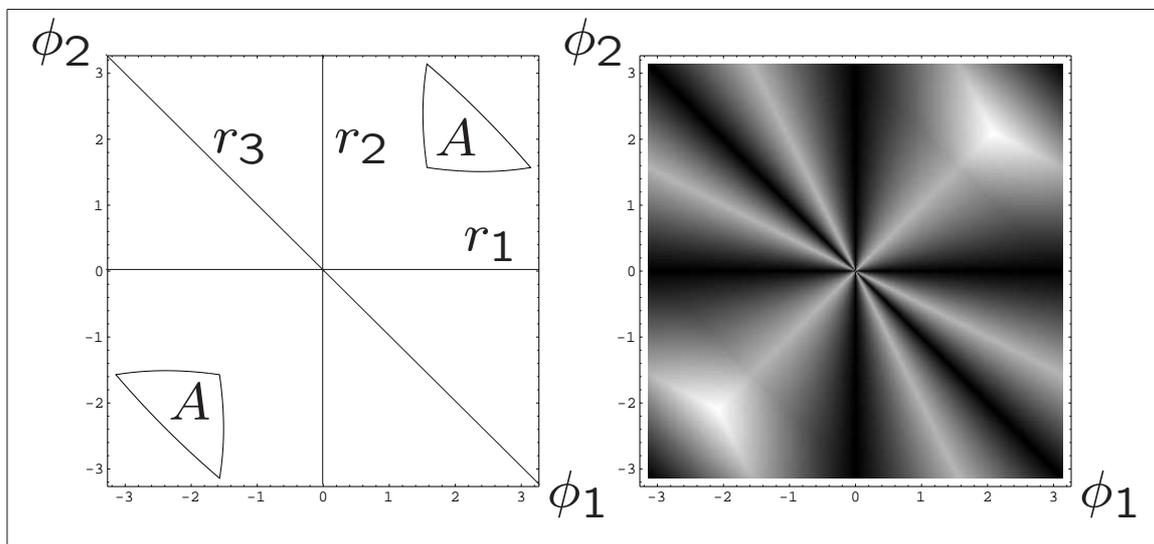
$$w \equiv e^{i\phi_1} + e^{i\phi_2} + e^{i\phi_3}$$

$$P(\lambda) = \lambda^3 - w\lambda^2 + \bar{w}\lambda - 1$$

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 2k\pi \quad , \quad \begin{cases} k \in \{-1, 0, 1\} \\ \phi_i \in [-\pi, \pi] \end{cases}$$

Un sottogruppo  $SU(2)$  è caratterizzato dall'averne uno dei tre  $\phi_i$  uguale a zero.

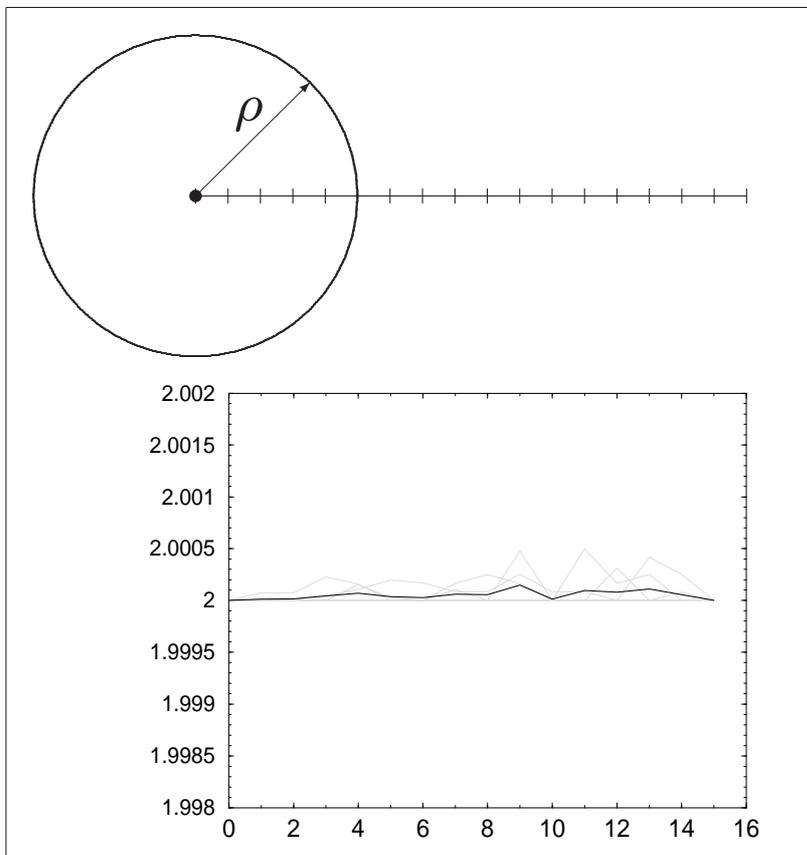
$$\Xi(\phi_1, \phi_2) \equiv 2 + \frac{\min(|\phi_1|, |\phi_2|, |\phi_3|)}{\sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2}} \sqrt{6}$$



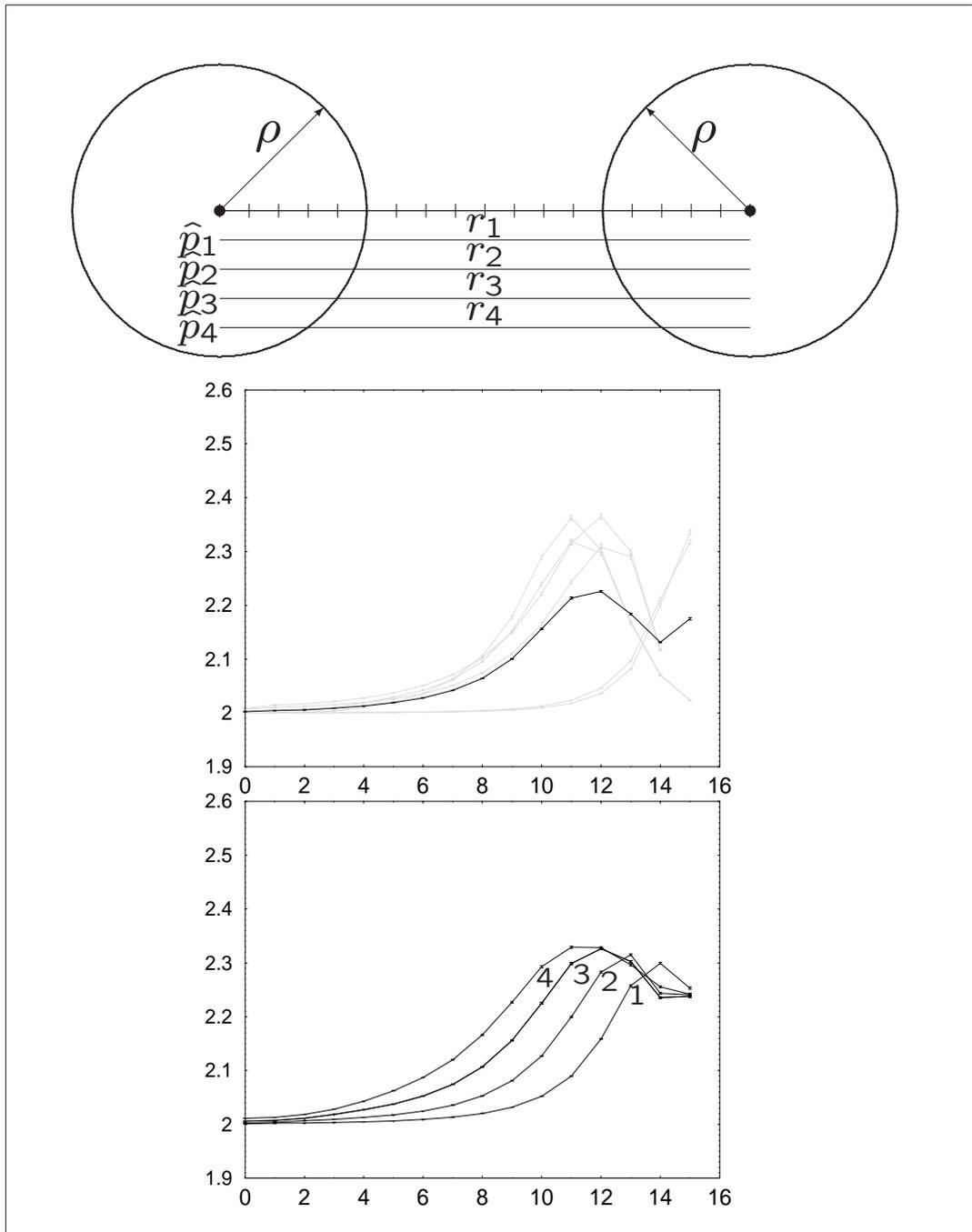
$$\langle \Xi \rangle_{SU(3)} = 2.314696 \pm 0.000021$$

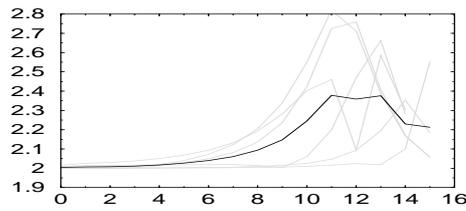
## Singolo istantone

---



# Coppia Istantone–Antiistantone

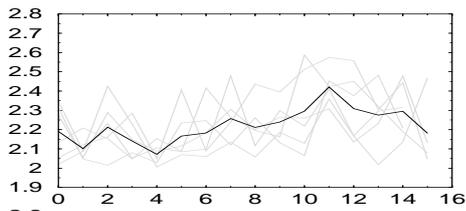




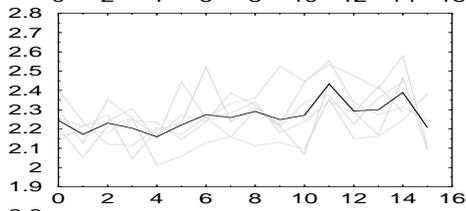
0 sweeps

$\beta = 6.10$

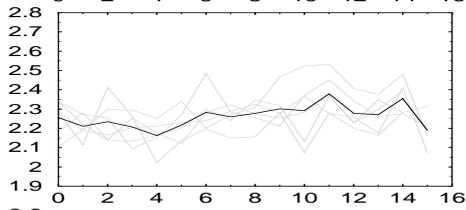
$\beta = 6.00$



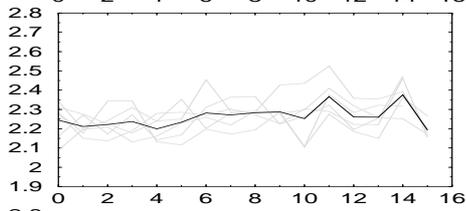
2 sweeps



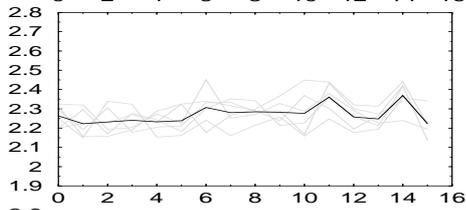
4 sweeps



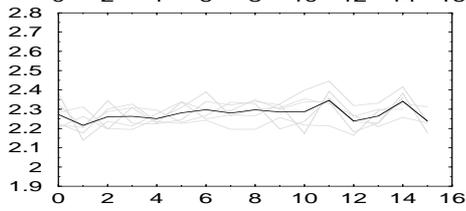
6 sweeps



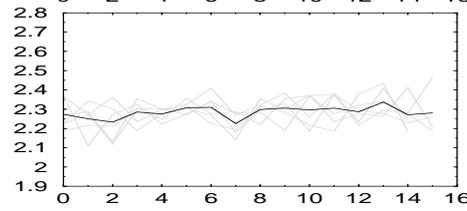
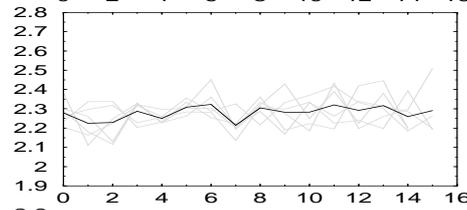
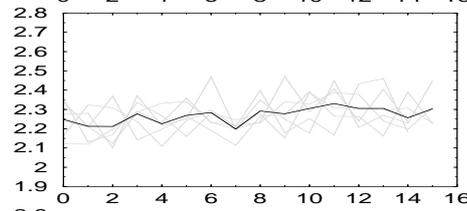
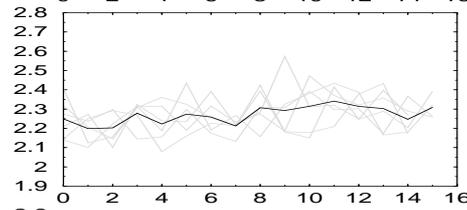
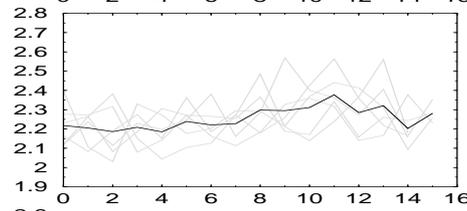
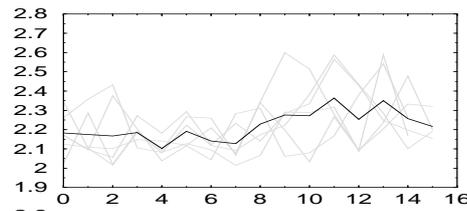
8 sweeps



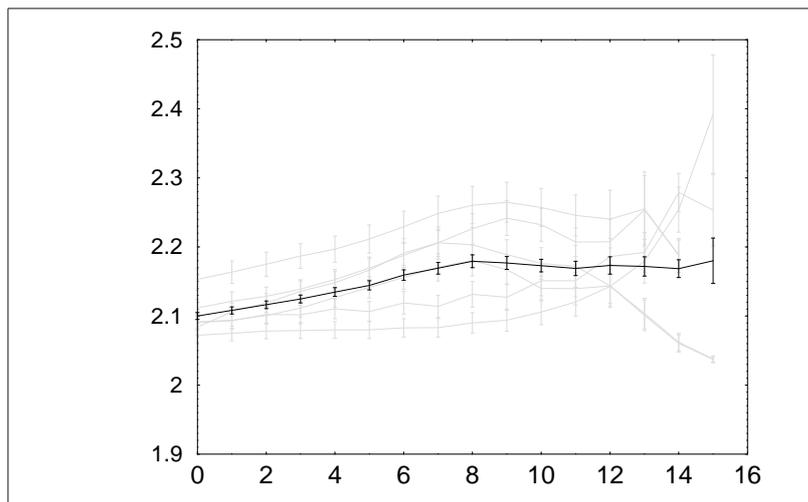
10 sweeps



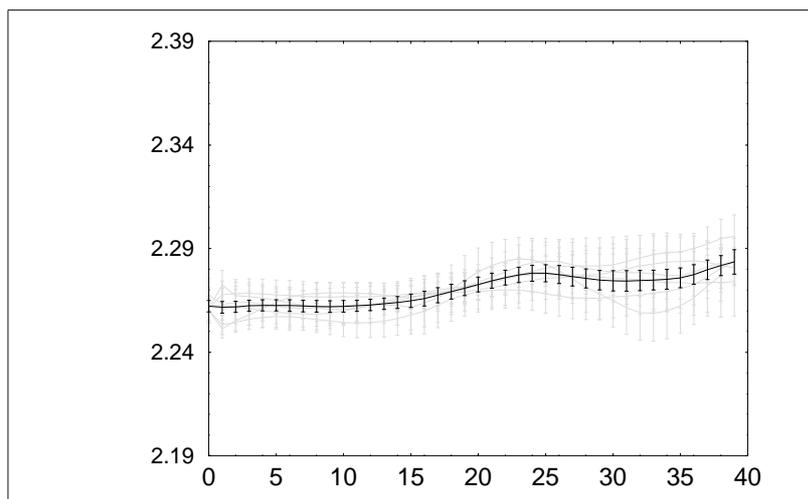
12 sweeps



## Coppia Istantone–Antiistantone: media sulle posizioni di entrambe le plaquette



## Media su tutto il volume di dodici diverse configurazioni



## Conclusioni

---

- Il parametro testato riconosce le configurazioni  $SU(2)$  tuttavia, mediando su regioni estese dello spazio-tempo, il segnale viene notevolmente attenuato.
- Il parametro è altresì sensibile alle fluttuazioni quantistiche e le misure vengono sensibilmente alterate dalla presenza di queste ultime.

## Prospettive future

---

- Ricerca e sperimentazioni di nuovi parametri (meno sensibili alle fluttuazioni quantistiche)
- Possibilità di combinare più parametri per pesare in modo diverso le regioni interagenti rispetto alle altre.
- Sperimentazione su altri tipi di modelli (ad esempio quello dinamico di Shuryak) ed infine sulle configurazioni ottenute mediante simulazioni Monte-Carlo su reticolo.