Available at: http://publications.ictp.it IC/2010/016

United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization
and
International Atomic Energy Agency
THE ABDUS SALAM INTERNATIONAL CENTRE FOR THEORETICAL PHYSICS

QUASI-BIGÈBRES DE LIE ET COHOMOLOGIE D'ALGÈBRE DE LIE

Momo Bangoura[1]
Département de Mathématiques, Université de Conakry,
BP 1147, Conakry, République de Guinée
and
The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Italy.

Abstract

Lie quasi-bialgebras are natural generalisations of Lie bialgebras introduced by Drinfeld. To any Lie quasi-bialgebra structure of finite-dimensional $(\mathcal{G}, \mu, \gamma, \phi)$, corresponds one Lie algebra structure on $\mathcal{D} = \mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^*$, called the double of the given Lie quasi-bialgebra. We show that there exist on $\Lambda\mathcal{G}$, the exterior algebra of $\mathcal{G}$, a $\mathcal{D}$-module structure and we establish an isomorphism of $\mathcal{D}$-modules between $\Lambda\mathcal{D}$ and $End(\Lambda\mathcal{G})$, $\mathcal{D}$ acting on $\Lambda\mathcal{D}$ by the adjoint action.

MIRAMARE – TRIESTE
May 2010

[1]Senior Associate of ICTP. bangm59@yahoo.fr

Résumé

Les quasi-bigèbres de Lie sont des généralisations naturelles, introduites par Drinfeld, des bigèbres de Lie. A toute structure de quasi-bigèbre de Lie $(\mathcal{G}, \mu, \gamma, \phi)$ de dimension finie, il correspond une structure d'algèbre de Lie sur $\mathcal{D} = \mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^*$, appelée le double de la quasi-bigèbre de Lie donnée. On montre qu'il existe sur $\Lambda\mathcal{G}$, l'algèbre extérieure de $\mathcal{G}$, une structure de $\mathcal{D}$-module et nous établissons un isomorphisme de $\mathcal{D}$-modules entre $\Lambda\mathcal{D}$ et $End(\Lambda\mathcal{G})$, $\mathcal{D}$ agissant sur $\Lambda\mathcal{D}$ par l'action adjointe.

1 Introduction

Le but de ce travail est de construire pour une quasi-bigèbre de Lie donnée $(\mathcal{G}, \mu, \gamma, \phi)$, une représentation naturelle de son double $\mathcal{D}$ sur l'algèbre extérieure de $\mathcal{G}$, ou encore une structure de $\mathcal{D}$-module sur $\Lambda\mathcal{G}$, de telle sorte qu'il existe un isomorphisme de $\mathcal{D}$-modules entre $\Lambda\mathcal{D}$ et $End(\Lambda\mathcal{G})$, $\mathcal{D}$ agissant sur $\Lambda\mathcal{D}$ par l'action adjointe.

Les quasi-bigèbres de Lie ([5]) ou qusi-bigèbres jacobiennes ([1], [3], [7]) sont des généralisations naturelles des bigèbres de Lie ([4]), introduites par Drinfeld comme étant les limites classiques des algèbres quasi-Hopf; contrairement aux bigèbres de Lie, elles sont caractérisées par l'existence d'un défaut d'identité de co-Jacobi pour le co-crochet, qui est en fait le cobord d'un certain élément de $\Lambda^3\mathcal{G}$, où $\mathcal{G}$ est l'espace vectoriel sur lequel est définie la structure de quasi-bigèbre de Lie, alors que pour les bigèbres de Lie, ce défaut est nul.

Dans la section 2, nous faisons un bref rappel de quelques notions fondamentales qui sont les outils de travail dans toute la suite, notamment le crochet de Schouten algébrique, la cohomologie d'algèbre de Lie.

Dans la section 3, nous rappelons la définition et les propriétés des quasi-bigèbres de Lie et à partir d'une structure de quasi-bigèbre de Lie donnée $(\mathcal{G}, \mu, \gamma, \phi)$, nous définissons des opérateurs de cohomologie sur $\Lambda\mathcal{G}$ et $\Lambda\mathcal{G}^*$, qui sont liés par un ensemble de relations, conséquences des axiomes de la structure de quasi-bigèbre de Lie. Enfin, nous définissons le laplacien d'une quasi-bigèbre de Lie, qui est une dérivation de degré 0 de $(\Lambda\mathcal{G}, \wedge)$ et de $(\Lambda\mathcal{G}, [,]^\mu)$, où $[,]^\mu$ est le crochet de Schouten algébrique ([7], [8], [11]) défini à partir de la structure d'algèbre de Lie sur $\mathcal{G}$; on montre qu'il commute avec l'opérateur d'homologie de Chevalley-Eilenberg (à coefficients triviaux) défini également à partir de la structure d'algè bre de Lie sur $\mathcal{G}$.

La section 4 recouvre l'essentiel du travail, à savoir la défintion d'une représentation canonique de l'algèbre de Lie double $\mathcal{D}$ d'une quasi-bigèbre de Lie $(\mathcal{G}, \mu, \gamma, \phi)$ sur son algèbre extérieure $\Lambda\mathcal{G}$ et l'établissement d'un isomorphisme de $\mathcal{D}$-modules entre $\Lambda\mathcal{D}$ et $End(\Lambda\mathcal{G})$, $\mathcal{D}$ agissant sur $\Lambda\mathcal{D}$ par l'action adjointe. Pour cela nous utilisons les constructions de ([12]) basées sur la théorie des algèbres de Clifford ([9]).

Dans toute la suite nous supposerons les structures d'algèbre de Lie de dimension finie. Ainsi, si $(\mathcal{G}, \mu)$ est une algèbre de Lie et $\mathcal{G}^*$ son espace vectoriel dual, le crochet de dualité entre $\Lambda\mathcal{G}$ et $\Lambda\mathcal{G}^*$ étendant celui entre $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}^*$ est défini par

$$< \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge ... \wedge \xi_m, x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n >= \delta_m^n det(< \xi_i, x_j >),$$

$\xi_i \in \mathcal{G}^*, i = 1, ..., m, x_j \in \mathcal{G}, j = 1, ..., n.$
Pour tous $X \in \Lambda\mathcal{G}$, notons par $\varepsilon_X \in End(\Lambda\mathcal{G})$ l'application définie par

$$Y \in \Lambda\mathcal{G} \to X \wedge Y \in \Lambda\mathcal{G},$$

et par $i_X \in End(\Lambda\mathcal{G}^*)$ sa transposée définie par

$$< i_X A, Y >=< A, X \wedge Y >, \forall Y \in \mathcal{G}, \forall A \in \mathcal{G}^*.$$

2 Préliminaires

Dans cette section, nous rappelons certaines notions standard utiles pour la suite du travail.

2.1 Crochet de Schouten algébrique

Soit $(\mathcal{G}, \mu)$ une algèbre de Lie sur le corps K, supposé égal à R ou C, où $\mu : \Lambda^2\mathcal{G} \to \mathcal{G}$ est le crochet d'algèbre de Lie sur $\mathcal{G}$.

Définition 2.1 *Le crochet de Schouten algébrique est la structure d'algèbre de Lie graduée* $[,]^\mu$, *sur l'algèbre extérieure,* $\Lambda\mathcal{G} = \bigoplus_{p\geq -1} \Lambda^{p+1}\mathcal{G}$, *de* $\mathcal{G}$ *qui:*
(i) s'annule si l'un des arguments est dans $\mathbf{K}$,
(ii) étend le crochet de Lie μ, *i.e.*

$$[x, y]^\mu = \mu(x, y), \forall x, y \in \mathcal{G},$$

(iii) satisfait la règle suivante sur le degré:

$$[X, Y]^\mu \in \Lambda^{p+q+1}\mathcal{G},$$

si $X \in \Lambda^{p+1}\mathcal{G}$ *et* $Y \in \Lambda^{q+1}\mathcal{G}$,
(iv) satisfait l'anti-commutativité graduée, i.e.

$$[X, Y]^\mu = -(-1)^{pq}[Y, X]^\mu,$$

si $X \in \Lambda^{p+1}\mathcal{G}$ *et* $Y \in \Lambda^{q+1}\mathcal{G}$,
(v) satisfait la règle de Leibniz graduée

$$[X, Y \wedge Z]^\mu = [X, Y]^\mu \wedge Z + (-1)^{p(q+1)} Y \wedge [X, Z]^\mu,$$

si $X \in \Lambda^{p+1}\mathcal{G}$, $Y \in \Lambda^{q+1}\mathcal{G}$ *et* $Z \in \Lambda\mathcal{G}$, *et*
(vi) satisfait l'identité de Jacobi graduée, i.e.

$$(-1)^{pr}[[X, Y]^\mu, Z]^\mu + (-1)^{pq}[[Y, Z]^\mu, X]^\mu + (-1)^{qr}[[Z, X]^\mu, Y]^\mu = 0,$$

si $X \in \Lambda^{p+1}\mathcal{G}$, $Y \in \Lambda^{q+1}\mathcal{G}$ *et* $Z \in \Lambda^{r+1}\mathcal{G}$.

Remarque 2.1: On peut définir un tel crochet sur $\Lambda\mathcal{G}$ pour tout élément $\mu \in Hom(\Lambda^2\mathcal{G}, \mathcal{G})$; l'anti-commutativité graduée et la règle de Leibniz graduée restent en vigueur, mais en général le crochet $[,]^\mu$ ne vérifie pas l'identité de Jacobi graduée et il la vérifie si et seulement si $(\mathcal{G}, \mu)$ est une algèbre de Lie ([11]). Dans toute la suite le terme crochet signifiera un élément de $Hom(\Lambda^2\mathcal{G}, \mathcal{G})$; il sera un crochet de Lie s'il vérifie l'identité de Jacobi.
On a le résultat suivant

Proposition 2.1 *Soit $(\mathcal{G}, \mu)$ une algèbre de Lie. Alors, $\forall x \in \mathcal{G}$, $Y \in \Lambda\mathcal{G}$, on a*

$$\varepsilon_{[x,Y]^\mu} = [ad_x, \varepsilon_Y],$$

où $ad : x \in \mathcal{G} \to ad_x \in End\mathcal{G}$ est la représentation adjointe de $\mathcal{G}$, définie, pour $y \in \mathcal{G}$, par $ad_x y = \mu(x, y)$ et $[,]$ désigne le crochet commutateur des endormorphismes.

La démonstration de cette proposition est une traduction de la règle de Leibniz du crochet $[,]^\mu$.

△

2.2 Cohomologie d'algèbre de Lie

Soit $(\mathcal{G}, \mu)$ une algèbre de Lie et soit M un $\mathcal{G}$-module, c'est-à-dire que $\mathcal{G}$ agit sur M. Par exemple $\mathcal{G}$ agit sur elle-même (plus généralement sur son algèbre tensorielle) par la représentation adjointe. $\mathcal{G}$ agit sur son algèbre tensorielle de la manière suivante; pour des éléments décomposables, $y_1 \otimes y_2 \otimes .... \otimes y_n \in \bigotimes^n \mathcal{G}$,

$$x.(y_1 \otimes y_2 \otimes .... \otimes y_n) = \sum_{i=1}^{n} y_1 \otimes y_2 \otimes .... \otimes (ad_x y_i) \otimes ... \otimes y_n.$$

Définition 2.2 *L'espace vectoriel des applications k-linéaires antisymétriques sur $\mathcal{G}$ à valeurs dans M est appelée l'espace des k-cochaines de $\mathcal{G}$ à valeurs dans M.*

Désignons par $\mathcal{C}^k(\mathcal{G}, M)$, l'espace vectoriel des k-cochaines de $\mathcal{G}$ à valeurs dans M et $\mathcal{C}(\mathcal{G}, M) = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{C}^k(\mathcal{G}, M)$.

Définition 2.3 *L'opérateur cobord de Chevalley-Eilenberg de $\mathcal{G}$ à valeurs dans M, noté δ_μ : $\mathcal{C}(\mathcal{G}, M) \to \mathcal{C}(\mathcal{G}, M)$, est l'application linéaire de degré 1 définie par:*

$$\begin{aligned}(\delta_\mu \alpha)(x_0, ..., x_k) \quad = \quad & \textstyle\sum_{i=0}^{k} (-1)^i x_i.(\alpha(x_0, ..., \hat{x_i}, ..., x_k)) \\ & + \textstyle\sum_{i<j} (-1)^{i+j} \alpha(\mu(x_i, x_j), x_0, ..., \hat{x_i}, ..., \hat{x_j}, ..., x_k)\end{aligned}$$

pour $\alpha \in \mathcal{C}^k(\mathcal{G}, M)$, $x_i \in \mathcal{G}, i = 0, 1, ..., k$; $x_i.m$ désignant l'action de $x_i \in \mathcal{G}$ sur $m \in M$ et $\hat{x_i}$ indiquant l'omission de l'argument x_i.

Remarque 2.2: On peut définir un tel opérateur δ_μ pour tout élément $\mu \in Hom(\Lambda^2\mathcal{G}, \mathcal{G})$. En général $\delta_\mu^2 \neq 0$ et $\delta_\mu^2 = 0$ si et seulement si $(\mathcal{G}, \mu)$ est une algèbre de Lie ([10]).

Définition 2.4 *Une k-cochaine α est appelée un k-cocycle si $\delta_\mu \alpha = 0$. Une k-cochaine α est appelée un k-cobord si il existe une (k-1)-cochaine β, telle que $\alpha = \delta_\mu \beta$.*

Ainsi, comme on le voit, tout k-cobord est un k-cocycle; ce qui nous conduit à la définition suivante:

Définition 2.5 *Le quotient de l'espace vectoriel des k-cocycles par l'espace vectoriel des k-cobords est appelé le k^{ieme} espace de cohomologie de $\mathcal{G}$ à valeurs dans M et noté par $H^k(\mathcal{G}, M)$.*

Remarque 2.3: Les 0-cocycles de $\mathcal{G}$ à valeurs dans M sont les éléments invariants dans M, i.e. les éléments $m \in M$ tels que $x.m = 0$, pour tous $x \in \mathcal{G}$.

2.3 La représentation co-adjointe

On introduit à présent la définition de la représentation co-adjointe d'une algèbre de Lie sur son espace vectoriel dual.
Soit $(\mathcal{G}, \mu)$ une algèbre de Lie et soit $\mathcal{G}^*$ son espace vectoriel dual. Pour $x \in \mathcal{G}$, posons

$$ad_x^* = -^t(ad_x).$$

Comme on le voit par définition, $ad_x^* \in End(\mathcal{G}^*)$ et satisfait la relation

$$< ad_x^*\xi, x >= - < \xi, ad_x y >=< \xi, \mu(x, y) >,$$

pour $x \in \mathcal{G}$, $\xi \in \mathcal{G}^*$. On montre facilement que l'application $x \in \mathcal{G} \to ad_x^* \in End(\mathcal{G}^*)$ est une représentation de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}^*$. D'où

Définition 2.6 *La représentation $x \to ad_x^*$ de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}^*$ est appelée la représentation co-adjointe de $\mathcal{G}$.*

De la proposition 2.1 et de la définition précédente, nous obtenons le résultat suivant:

Proposition 2.2 *Soit $(\mathcal{G}, \mu)$ une algèbre de Lie. Alors, $\forall x \in \mathcal{G}$, $Y \in \Lambda\mathcal{G}$, on a*

$$i_{[x,Y]^\mu} = [ad_x^*, i_Y].$$

3 Quasi-bigèbres de Lie

Les quasi-bigèbres de Lie ([5]) (appelées quasi-bigèbres jacobiennes dans ([1], [3], [7])) sont les limites classiques des algèbres quasi-Hopf ([5]), introduites par Drinfeld.

3.1 Définitions et notations

Définition 3.1 *Une quasi-bigèbre de Lie est un quadruplet $(\mathcal{G}, \mu, \gamma, \phi)$ où $\mathcal{G}$ est un espace vectoriel muni d'un crochet $\mu \in Hom(\Lambda^2\mathcal{G}, \mathcal{G})$, d'un co-crochet $\gamma \in Hom(\mathcal{G}, \Lambda^2\mathcal{G})$ et d'un élément $\phi \in \Lambda^3\mathcal{G}$ tels que:*

3.1. $(\mathcal{G}, \mu)$ est une algèbre de Lie;

3.2. γ est un 1-cocycle de l'algèbre de Lie $(\mathcal{G}, \mu)$, à valeurs dans $\Lambda^2\mathcal{G}$ pour l'action adjointe définie par μ, i.e. $\delta_\mu\gamma = 0$;

3.3. $\frac{1}{2}Alt(\gamma \otimes 1)\gamma(x) = (\delta_\mu\phi)(x), \forall x \in \mathcal{G}$;

3.4. $Alt(\gamma \otimes 1 \otimes 1)(\phi) = 0$;

où Alt est l'opérateur alternateur défini sur l'algèbre tensorielle de $\mathcal{G}$ par

$$Alt(X_1 \otimes .... \otimes x_n) = \sum_{\sigma} sign(\sigma) x_{\sigma(1)} \otimes ... \otimes x_{\sigma(n)},$$

$x_i \in \mathcal{G}, i = 1, ..., n$, σ étant une permutation de $\{1, ..., n\}$ et $sign(\sigma)$ la signature de la permutation σ.

Remarque 3.1:

1- Dans le cas où $\phi = 0$, le triplet $(\mathcal{G}, \mu, \gamma)$ satisfaisant les conditions ci-dessus, n'est rien d'autre qu'une bigèbre de Lie ([4]).

2- La condition 2.3 signifie que γ ne vérifie pas l'identité co-Jacobi et donc son transposé n'est pas un crochet de Lie sur $\mathcal{G}^*$. Ainsi, contrairement à la notion de bigèbre de Lie, la notion de quasi-bigèbre de Lie n'est pas auto-duale, l'objet dual est appelé une bigèbre quasi-Lie ([5]) ou quasi-bigèbre co-jacobienne ([1], [7]). Dans ce travail nous considérerons pour des fins d'usage, l'opposé du transposé de γ comme étant le crochet sur $\mathcal{G}^*$ et nous le noterons aussi par γ pour simplicité d'écriture, i.e.

$$< \gamma(x), \xi \wedge \eta >= - < x, \gamma(\xi, \eta) >, \forall x \in \mathcal{G}, \forall \xi, \eta \in \mathcal{G}^*.$$

3- Dans la condition 2.3, $\phi : \mathbf{K} \to \Lambda^3\mathcal{G}$ est considéré comme une 0-forme sur $\mathcal{G}$ à valeurs dans $\Lambda^3\mathcal{G}$, tandis que si nous considérons $\phi : \Lambda^3\mathcal{G}^* \to \mathbf{K}$ comme une 3-forme sur $\mathcal{G}^*$ à valeurs dans $\mathbf{K}$, alors la condition 2.4 de la définition ci-dessus est équivalente à $\delta_\gamma\phi = 0$.

4- La condition 2.2 s'écrit explicitement sous la forme

$$\gamma(\mu(x, y)) = (ad^\mu_x \otimes 1 + 1 \otimes ad^\mu_x)\gamma(y) - (ad^\mu_y \otimes 1 + 1 \otimes ad^\mu_y)\gamma(x),$$

où $ad^\mu_x y = \mu(x, y), \forall x, y \in \mathcal{G}$, ou de façon équivalente

$$\mu(\gamma(\xi, \eta)) = (ad^\gamma_\xi \otimes 1 + 1 \otimes ad^\gamma_\xi)\mu(\eta) - (ad^\gamma_\eta \otimes 1 + 1 \otimes ad^\gamma_\eta)\mu(\xi),$$

où $ad^\gamma_\xi \eta = \gamma(\xi, \eta), \forall \xi, \eta \in \mathcal{G}^*$, et l'application μ et sa transposée sont notées par μ pour simplicité d'écriture.

La donnée d'une structure de quasi-bigèbre de Lie sur $\mathcal{G}$ détermine une unique structure d'algèbre de Lie $[,]_\mathcal{D}$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{D} = \mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^*$ qui laisse invariant le produit scalaire canonique sur $\mathcal{D}$,

$$< \xi + x, y + \eta >=< \xi, y > + < x, \eta >, \quad \forall \xi + x \in \mathcal{D}^*, \forall y + \eta \in \mathcal{D},$$

en posant

$$[x, y]_\mathcal{D} = \mu(x, y),$$

$$[x, \xi]_\mathcal{D} = -ad^{\gamma *}_\xi x + ad^{\mu *}_x \xi,$$

$$[\xi, \eta]_\mathcal{D} = \phi(\xi, \eta) + \gamma(\xi, \eta),$$

où $< ad_x^{\mu *}\xi, y >= - < \xi, \mu(x,y) >$, $< ad_\xi^{\gamma *}x, \eta >= - < x, \gamma(\xi,\eta) >$ et $\phi(\xi,\eta) = i_{\xi\wedge\eta}\phi$, pour tous $x, y \in \mathcal{G}, \xi, \eta \in \mathcal{G}^*$.
Comme on le voit, $(\mathcal{G}, \mu)$ est une sous-algèbre de Lie isotrope de $(\mathcal{D}, [,]_{\mathcal{D}})$, alors que $\mathcal{G}^*$ ne l'est pas, il est juste un sous-espace isotrope de $\mathcal{D}$, à cause de l'existence de ϕ. En général, on montre dans ([7]) que les structures de quasi-bigèbre de Lie sur $\mathcal{G}$ sont en correspondance biunivoque avec les structures d'algèbre de Lie sur $\mathcal{D} = \mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^*$ laissant invariant le produit scalaire canonique, dont $\mathcal{G}$ est une sous-algèbre de Lie. Dans ces conditions le couple $(\mathcal{D}, \mathcal{G})$, avec le produit scalaire canonique sur $\mathcal{D}$, est appelé un **couple de Manin** ([5]). Plus précisement

Définition 3.2 *Un couple de Manin consiste en un couple $(\mathcal{D}, \mathcal{G})$, où $\mathcal{D}$ est une algèbre de Lie munie d'un produit scalaire invariant non dégénéré et $\mathcal{G}$ une sous-algèbre de Lie isotrope de dimension maximale de $\mathcal{D}$.*

L'étude des quasi-bigèbres de Lie est rendue facile grâce au twisting ([5], [7]) appelé modification dans ([1]), qui consiste à construire de nouvelles structures de quasi-bigèbre de Lie sur $\mathcal{G}$ à partir d'une déjà connue; ce qui permet de les étudier en termes de classes d'équivalence ([7]), en montrant que les classes d'équivalence modulo twisting sont en correspondance biunivoque avec les couples de Manin.

Définition 3.3 *Soit $(\mathcal{G}, \mu, \gamma, \phi)$ une quasi-bigèbre de Lie. $\mathcal{D} = \mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^*$ muni du crochet de Lie $[,]_{\mathcal{D}}$ défini ci-dessus est appelé le double de la quasi-bigèbre de Lie donnée, et noté $\mathcal{G} \bowtie \mathcal{G}^*$.*

Définition 3.4 *Une quasi-bigèbre de Lie $(\mathcal{G}, \mu, \gamma, \phi)$ est dite exacte ou cobord si il existe un élément $\mathbf{r} \in \Lambda^2\mathcal{G}$ tel que le 1-cocycle $\gamma : \mathcal{G} \to \Lambda^2\mathcal{G}$ soit le cobord de $\mathbf{r}$, i.e.*

$$\gamma(x) = (\delta_\mu \mathbf{r})(x) = [x, \mathbf{r}]^\mu = -[\mathbf{r}, x]^\mu, \forall x \in \mathcal{G},$$

et

$$\phi = -\frac{1}{2}[\mathbf{r}, \mathbf{r}]^\mu.$$

Montrons à présent que le double de toute quasi-bigèbre de Lie est muni, en plus de la structure d'algèbre de Lie définie par $[,]_{\mathcal{D}}$, d'une structure canonique de quasi-bigèbre de Lie exacte ([3]).

Théorème 3.1 *Soit $\mathcal{D} = \mathcal{G} \bowtie \mathcal{G}^*$ le double d'une quasi-bigèbre de Lie $(\mathcal{G}, \mu, \gamma, \phi)$. Soit (e_i) une base de $\mathcal{G}$ et (ξ^i) la base duale de $\mathcal{G}^*$. Posons*

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2}\sum_i e_i \wedge \xi^i.$$

Alors $(\mathcal{D}, \mathbf{r})$ est une quasi-bigèbre de Lie exacte et est appelée la quasi-bigèbre de Lie double de $(\mathcal{G}, \mu, \gamma, \phi)$.

Nous avons le résultat suivant [1]:

Proposition 3.1 *Soit $(\mathcal{G}, \mu, \gamma, \phi)$ une quasi-bigèbre de Lie. Alors nous avons les relations suivantes:*

3.5. $ad^{\mu *}_{\mu(x,y)} = [ad^{\mu *}_x, ad^{\mu *}_y], \forall x, y \in \mathcal{G};$

3.6. $ad^{\gamma *}_\xi \mu(x,y) = \mu(ad^{\gamma *}_\xi x, y) + \mu(x, ad^{\gamma *}_\xi y) + ad^{\gamma *}_{ad^{\mu *}_y \xi} x - ad^{\gamma *}_{ad^{\mu *}_x \xi} y$
$\forall x, y \in \mathcal{G}, \forall \xi \in \mathcal{G}^*;$

3.7. $ad^{\gamma *}_{\gamma(\xi,\eta)} x = [ad^{\gamma *}_\xi, ad^{\gamma *}_\eta](x) + ad^{\mu}_x \phi(\xi,\eta) - \phi(ad^{\mu *}_x \xi, \eta) - \phi(\xi, ad^{\mu *}_x \eta),$
$\forall x \in \mathcal{G}, \forall \xi, \eta \in \mathcal{G}^*;$

3.8. $ad^{\mu *}_x \gamma(\xi,\eta) = \gamma(ad^{\mu *}_x \xi, \eta) + \gamma(\xi, ad^{\mu *}_x \eta) + ad^{\mu *}_{ad^{\gamma *}_\eta x} \xi - ad^{\mu *}_{ad^{\gamma *}_\xi x} \eta,$
$\forall x \in \mathcal{G}, \forall \xi, \eta \in \mathcal{G}^*;$

3.9. $\oint \gamma(\gamma(\xi,\eta),\zeta) = -\oint ad^{\mu *}_{\phi(\xi,\eta)} \zeta, \forall \xi, \eta, \zeta \in \mathcal{G}^*;$

3.10. $\oint \phi(\gamma(\xi,\eta),\zeta) = \oint ad^{\gamma *}_\xi \phi(\xi,\eta), \forall \xi, \eta, \zeta \in \mathcal{G}^*.$
où $[,]$ désigne le crochet commutateur des endormorphismes et $\oint$ désigne la somme sur les permutations circulaires des éléments $\xi, \eta, \zeta \in \mathcal{G}^*$.

Démonstration: La preuve de ces différentes relations est une conséquence directe de l'identité de Jacobi pour le crochet $[,]_{\mathcal{D}}$ défini sur $\mathcal{D} = \mathcal{G} \bowtie \mathcal{G}^*$. $\triangle$

Nous avons les équivalences suivantes:
- la relation (3.5) traduit le fait que μ défini un crochet de Lie sur $\mathcal{G}$;
- les relations (3.6) et (3.8) sont équivalentes à la condition de 1-cocycle pour γ, $\delta_\mu \gamma = 0$;
- les relations (3.7) et (3.9) sont équivalentes à la condition $\frac{1}{2} Alt(\gamma \otimes 1)\gamma(x) = (\delta_\mu \phi)(x)$;
- la relation (3.10) est équivalente à la condition (3.4), i.e. $Alt(\gamma \otimes 1 \otimes 1)(\phi) = 0$.

Les relations (3.6) et (3.7) s'étendent aisement sur $\Lambda\mathcal{G}$ grâce au résultat suivant:

Proposition 3.2 *Pour tous $X = x_1 \wedge ... \wedge x_m$ et $Y = y_1 \wedge ... \wedge y_n$ dans $\Lambda\mathcal{G}$, et pour tout $\xi \in \mathcal{G}^*$, on a*

$$\begin{aligned} ad^{\gamma *}_\xi [X,Y]^\mu \quad = \quad & [ad^{\gamma *}_\xi X, Y]^\mu + [X, ad^{\gamma *}_\xi Y]^\mu \\ & + \textstyle\sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} ad^{\gamma *}_{ad^{\mu *}_{y_j} \xi} X \wedge \hat{Y}_j \\ & + (-1)^{|X|} \textstyle\sum_{i=1}^m (-1)^{i+1} \hat{X}_i \wedge ad^{\gamma *}_{ad^{\mu *}_{x_i} \xi} Y, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} ad^{\gamma *}_{\gamma(\xi,\eta)} X \quad = \quad & [ad^{\gamma *}_\xi, ad^{\gamma *}_\eta](X) - ad^{\mu}_{\phi(\xi,\eta)} X \\ & + \textstyle\sum_{i=1}^m (-1)^i (\phi(ad^{\mu *}_{x_i} \xi, \eta) + \phi(\xi, ad^{\mu *}_{x_i} \eta)) \wedge \hat{X}_i, \end{aligned}$$

où $\hat{X}_i = x_1 \wedge ... \wedge \hat{x_i} \wedge ... \wedge x_m$ pour $1 \leq i \leq m$ et de manière similaire pour $\hat{Y}_j$, pour $1 \leq j \leq n$.

Démonstration: Ces deux relations se démontrent facilement par récurrence sur les degrés de X et Y, en utilisant la règle de Leibniz graduée du crochet $[,]^\mu$ et la propriété de dérivation de $ad_\xi^{\hat{\gamma}^*}$ sur $(\Lambda\mathcal{G}, \wedge)$ pour tout $\xi \in \mathcal{G}^*$. La première relation est énoncée dans ([12]) dans le cas des bigèbres de Lie. $\triangle$

3.2 Exemples

Exemple 3.1 *Toute bigèbre de Lie est une quasi-bigèbre de Lie; il suffit de prendre* $\phi = 0$.

Exemple 3.2 *Une large classe d'exemples de quasi-bigèbre de Lie est fournie par les quasi-bigèbres de Lie exactes, il suffit de choisir* $\mathbf{r} \in \Lambda^2\mathcal{G}$.

Exemple 3.3 *Soit* $(\mathcal{G}, \mu)$ *une algèbre de Lie. Alors tout élément* $\mathbf{r} \in \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ *de partie antisymétrique* ad^μ*-invariante, définie une structure de quasi-bigèbre de Lie en posant*

$$\gamma = \delta_\mu \mathbf{a}, \qquad \phi = -\frac{1}{2}([\mathbf{a}, \mathbf{a}]^\mu + [\mathbf{s}, \mathbf{s}]^\mu),$$

où $\mathbf{a}$ *(resp.* $\mathbf{s}$*) est la partie antisymétrique (resp. symétrique) de* $\mathbf{r}$*. Une telle structure est dite quasitriangulaire ([1], [3]).*

Exemple 3.4 *Soit* $(\mathcal{D}, \mathcal{G})$ *un couple de Manin; alors tout choix d'un sous-espace supplémentaire isotrope de* $\mathcal{G}$ *dans* $\mathcal{D}$ *définit une structure de quasi-bigèbre de Lie sur* $\mathcal{G}$.

3.3 Les opérateurs de cohomologie sur une quasi-bigèbre de Lie

Soit $(\mathcal{G}, \mu, \gamma, \phi)$ une quasi-bigèbre de Lie. Alors le crochet μ permet de définir sur $\Lambda\mathcal{G}^*$ l'opérateur cobord de Chevalley-Eilenberg (à coefficients triviaux) et son transposé sur $\Lambda\mathcal{G}$; notons-les respectivement par d_μ et ∂_μ:

$$d_\mu : \Lambda^k\mathcal{G}^* \to \Lambda^{k+1}\mathcal{G}^*$$
$$\partial_\mu : \Lambda^k\mathcal{G} \to \Lambda^{k-1}\mathcal{G}$$

où

$$(d_\mu\xi)(x_1 \wedge ... \wedge x_{k+1}) = \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\xi(\mu(x_i, x_j) \wedge x_1 \wedge ... \wedge \hat{x_i} \wedge ... \wedge \hat{x_j} \wedge ... \wedge x_{k+1}),$$
$$\partial_\mu(x_1 \wedge ... \wedge x_{k+1}) = \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\mu(x_i, x_j) \wedge x_1 \wedge ... \wedge \hat{x_i} \wedge ... \wedge \hat{x_j} \wedge ... \wedge x_{k+1},$$

pour $\xi \in \Lambda^k\mathcal{G}^*$, $x_i \in \mathcal{G}, i = 1, ..., k+1$.

De manière similaire, définissons les opérateurs d_γ et ∂_γ associés au crochet γ; ils sont définis respectivement sur $\Lambda\mathcal{G}$ et $\Lambda\mathcal{G}^*$ comme suit:

$$d_\gamma : \Lambda^k\mathcal{G} \to \Lambda^{k+1}\mathcal{G}$$

$$\partial_\gamma : \Lambda^k\mathcal{G}^* \to \Lambda^{k-1}\mathcal{G}^*$$

où

$$(d_\gamma X)(\xi_1 \wedge ... \wedge \xi_{k+1}) = \sum_{i<j}(-1)^{i+j} X(\gamma(\xi_i, \xi_j) \wedge \xi_1 \wedge ... \wedge \hat{\xi_i} \wedge ... \wedge \hat{\xi_j} \wedge ... \wedge \xi_{k+1}),$$

$$\partial_\gamma(\xi_1 \wedge ... \wedge \xi_{k+1}) = \sum_{i<j}(-1)^{i+j} \gamma(\xi_i, \xi_j) \wedge \xi_1 \wedge ... \wedge \hat{\xi_i} \wedge ... \wedge \hat{\xi_j} \wedge ... \wedge \xi_{k+1},$$

pour $X \in \Lambda^k \mathcal{G}$, $\xi_i \in \mathcal{G}^*, i = 1, ..., k+1$.

Remarque 3.2: Pour $k = 1$, d_γ n'est rien d'autre que le 1-cocycle γ.
Il est connu que l'opérateur d_μ est de carré nul, mais $d_\gamma^2 \neq 0$ du fait que γ ne définit pas un crochet de Lie sur $\mathcal{G}^*$. Par ailleurs, les opérateurs d_μ et ∂_μ satisfont les propriétés suivantes ([11], [12]):

$$d_\mu(A \wedge B) = (d_\mu A) \wedge B + (-1)^{|A|} A \wedge d_\mu B),$$

$$\partial_\mu(X \wedge Y) = (\partial_\mu X) \wedge Y + (-1)^{|X|} X \wedge \partial_\mu Y) + (-1)^{|X|}[X, Y]^\mu,$$

$$\partial_\mu [X, Y]^\mu = [\partial_\mu X, Y]^\mu + (-1)^{(|X|-1)}[X, \partial_\mu Y]^\mu,$$

pour tous $X, Y \in \Lambda\mathcal{G}$ et $A, B \in \Lambda\mathcal{G}^*$. Les opérateurs d_γ et ∂_γ satisfont les relations similaires.
Les lemmes suivants seront d'une grande utilité dans la suite:

Lemme 3.1 *Pour une quasi-bigèbre de Lie donnée $(\mathcal{G}, \mu, \gamma, \phi)$, on a:*

3.11. $ad_x^{\mu *} = [d_\mu, i_x], \forall x \in \mathcal{G}$;

3.12. $[d_\mu, ad_x^{\mu *}] = 0, \forall x \in \mathcal{G}$, *i.e.* $d_\mu(ad_x^{\mu *}\xi) = ad_x^{\mu *}(d_\mu \xi), \forall x \in \mathcal{G}, \forall \xi \in \mathcal{G}^*$;

3.13. $i_{d_\mu(ad_x^{\mu *}\xi)} = [ad_x^\mu, i_{d_\mu \xi}], \forall x \in \mathcal{G}, \forall \xi \in \mathcal{G}^*$;

3.14. $d_\gamma(ad_\xi^{\gamma *} x) = ad_\xi^{\gamma *}(d_\gamma x) + ad_x^\mu(i_\xi \phi) - i_{ad_x^{\mu *}\xi}\phi, \forall x \in \mathcal{G}, \forall \xi \in \mathcal{G}^*$;

3.15. $i_{\gamma(\xi,\eta)}\phi = ad_\xi^{\gamma *} i_\eta \phi - ad_\eta^{\gamma *} i_\xi \phi + d_\gamma(\phi(\xi, \eta)), \forall \xi, \eta \in \mathcal{G}^*$.

Démonstration:
(3.11) Par définition, comme $\partial_\mu(x) = 0, \forall x \in \mathcal{G}$ pour cause de degré, on a:

$$ad_x^\mu Y = [x, Y]^\mu = -\partial_\mu(x \wedge Y) - x \wedge \partial_\mu Y = -[\partial_\mu, \varepsilon_x](Y), \forall Y \in \Lambda\mathcal{G}$$

i.e.

$$ad_x^\mu = -[\partial_\mu, \varepsilon_x];$$

d'où par transpositition $ad_x^{\mu *} = [d_\mu, i_x], \forall x \in \mathcal{G}$;
(3.12) et (3.13) sont des conséquences directes de (3.11);
(3.14) est une conséquence directe de la relation (3.9);

(3.15) est une conséquence directe de la relation (3.10).
Ce qui achève la démonstration du lemme. $\triangle$

Lemme 3.2 *Pour une quasi-bigèbre de Lie donnée $(\mathcal{G}, \mu, \gamma, \phi)$, on a pour tout $\forall x \in \mathcal{G}$ et pour tout $Y = y_1 \wedge ... \wedge y_m \in \Lambda\mathcal{G}$:*

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1} ad^{\gamma *}_{ad^{\mu *}_{y_i}\xi} x \wedge \hat{Y}_j &= i_{d_\mu(\xi)}(d_\gamma(x) \wedge Y) - (i_{d_\mu(\xi)}(d_\gamma(x)))Y \\ &\qquad -(d_\gamma(x)) \wedge i_{d_\mu(\xi)} Y; \\ \textstyle\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i}(\phi(ad^{\mu *}_{y_i}\xi, \eta) \wedge \hat{Y}_i &= i_{d_\mu(\xi)}((i_\eta \phi) \wedge Y) - (i_{d_\mu(\xi)}(i_\eta \phi))Y \\ &\qquad -(i_\eta \phi) \wedge i_{d_\mu(\xi)} Y, \end{aligned}$$

où $\hat{Y}_i = y_1 \wedge ... \wedge \hat{y_i} \wedge ... \wedge y_m$ pour $1 \leq i \leq m$.

La démonstration du lemme relève d'un simple calcul.$\triangle$

Dans ([2]), on a le résultat suivant:

Proposition 3.3 *Soit $(\mathcal{G}, \mu, \gamma, \phi)$ une quasi-bigèbre de Lie. Alors les opérateurs d_μ, ∂_μ et ∂_γ satisfont les propriétés suivantes:*

3.16. $\partial_\gamma^2 + d_\mu i_\phi + i_\phi d_\mu - i_{\partial_\mu \phi} = 0$;

3.17. $\partial_\gamma i_\phi + i_\phi \partial_\gamma = 0$;

3.18. $\partial_\gamma i_x + i_x \partial_\gamma = -i_{\gamma(x)}$, $\forall x \in \mathcal{G}$.

On remarque bien que si $\phi = 0$, alors $\partial_\gamma^2 = 0$ et par transposition $d_\gamma^2 = 0$.

Définition 3.5 *L'opérateur*

$$L = \partial_\mu d_\gamma + d_\gamma \partial_\mu : \Lambda^k \mathcal{G} \to \Lambda^k \mathcal{G}$$

est appelé le **laplacien** *de la quasi-bigèbre de Lie $(\mathcal{G}, \mu, \gamma, \phi)$.*

Nous avons le résultat suivant:

Proposition 3.4 *Le laplacien d'une quasi-bigèbre de Lie $(\mathcal{G}, \mu, \gamma, \phi)$ satisfait les propriétés suivantes:*

3.19. $L = \partial_\mu d_\gamma + d_\gamma \partial_\mu$ *est une dérivation de* $(\Lambda\mathcal{G}, \wedge)$ *de degré* 0 *et son transposé* $L^* = d_\mu \partial_\gamma + \partial_\gamma d_\mu$ *est une dérivation de* $(\Lambda\mathcal{G}^*, \wedge)$ *de degré* 0*;*

3.20. Les opérateurs L *et* ∂_μ *commutent, i.e.* $[L, \partial_\mu] = 0$*, ou de manière équivalente* d_μ *et* $L^* = d_\mu \partial_\gamma + \partial_\gamma d_\mu$ *commutent, i.e.* $[L^*, d_\mu] = 0$.

Dans le cas des bigèbres de Lie, on généralise dans ([12]) la condition de 1-cocycle en montrant que les opérateurs d_μ et d_γ sont des dérivations respectivement de $(\Lambda\mathcal{G}^*, [,]^\gamma)$ et $(\Lambda\mathcal{G}, [,]^\mu)$; le résultat reste vrai dans le cas des quasi-bigèbres de Lie et s'énonce comme suit:

Proposition 3.5 *Soit $(\mathcal{G}, \mu, \gamma, \phi)$ une quasi-bigèbre de Lie. Alors, pour $A, B \in \Lambda\mathcal{G}^*$ et $X, Y \in \Lambda\mathcal{G}$, on a:*

$$d_\mu([A,B]^\gamma) = [d_\mu A, B]^\gamma + (-1)^{|A|-1}[A, d_\mu B]^\gamma$$

$$d_\gamma([X,Y]^\mu) = [d_\gamma X, Y]^\mu + (-1)^{|X|-1}[X, d_\gamma Y]^\mu$$

Démonstration: Dans le cas où $|X| = |Y| = 1$ et $|A| = |B| = 1$, les deux identités se réduisent à la condition de 1-cocycle dans la définition d'une quasi-bigèbre de Lie. Le cas général se démontre par récurrence sur les degrés de X, Y, A et B. $\triangle$

Soit $(\mathcal{G}, \mu, \gamma, \phi)$ une quasi-bigèbre de Lie telle que $\partial_\mu(\phi) \in Im\gamma$, i.e. qu'il existe $x_0 \in \mathcal{G}$ tel que $\gamma(x_0) = \partial_\mu(\phi)$. Des exemples de telles structures sont fournies par les quasi-bigèbres de Lie exactes où

$$\gamma(x) = (\delta_\mu \mathbf{r})(x) = [x, \mathbf{r}]^\mu = -[\mathbf{r}, x]^\mu, \forall x \in \mathcal{G},$$

et

$$\phi = -\frac{1}{2}[\mathbf{r}, \mathbf{r}]^\mu,$$

pour un certain élément $\mathbf{r} \in \Lambda^2\mathcal{G}$. En effet, comme ∂_μ est une dérivation de $(\Lambda\mathcal{G}, [,]^\mu)$, on a

$$\begin{aligned}\partial_\mu(\phi) &= -\tfrac{1}{2}\partial_\mu([\mathbf{r}, \mathbf{r}]^\mu) = -\tfrac{1}{2}([\partial_\mu \mathbf{r}, \mathbf{r}]^\mu - [\mathbf{r}, \partial_\mu \mathbf{r}]^\mu) \\ &= -[\partial_\mu \mathbf{r}, \mathbf{r}]^\mu = -\gamma(\partial_\mu \mathbf{r});\end{aligned}$$

d'où $\partial_\mu(\phi) \in Im\gamma$.

Dans [2], on montre qu'une telle structure de quasi-bigèbre de Lie permet de définir une structure d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle ([2], [6]) sur $\Lambda\mathcal{G}^*$ en posant

$$\Delta = \partial_\gamma + i_{x_0}, \qquad \delta = d_\mu, \qquad \Phi = i_\phi.$$

Plus précisement on a ([2])

Théorème 3.2 *Les structures de quasi-bigèbre de Lie $(\mathcal{G}, \mu, \gamma, \phi)$ telles que $\partial_\mu(\phi) \in Im\gamma$ sont en correspondance bijective avec les structures d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle sur $\Lambda\mathcal{G}^*$.*

Soit $\xi^\mu \in \mathcal{G}^*$ et $x^\gamma \in \mathcal{G}$ définis respectivement par

$$< \xi^\mu, x >= tr(ad^\mu_x \in End(\mathcal{G})), \qquad \forall x \in \mathcal{G}$$

et

$$< x^\gamma, \xi >= tr(ad^\gamma_\xi \in End(\mathcal{G}^*)), \qquad \forall \xi \in \mathcal{G}^*.$$

On a le résultat suivant:

Lemme 3.3 *Soit $(\mathcal{G}, \mu, \gamma, \phi)$ une quasi-bigèbre de Lie. Alors les éléments ξ^μ et x^γ satisfont les propriétés suivantes:*

3.21. $ad_x^{\mu *}\xi^\mu = 0, \forall x \in \mathcal{G}$, *ou de manière équivalente* $d_\mu(\xi^\mu) = 0$;

3.22. $< x^\gamma, \gamma(\xi, \eta) > = < \xi^\mu, \phi(\xi, \eta) > +2(i_{d_\mu(\xi)} i_\eta \phi) - 2(i_{d_\mu(\eta)} i_\xi \phi), \forall \xi, \eta \in \mathcal{G}^*$, *ou de manière équivalente* $d_\gamma(x^\gamma) = -i_{\xi^\mu}\phi - 2\partial_\mu \phi$;

3.23. $< x^\gamma, ad_x^{\mu *}\xi > = - < \xi^\mu, ad_\xi^{\gamma *} x > +2(i_{d_\mu(\xi)} d_\gamma(x)), \forall x \in \mathcal{G}, \forall \xi \in \mathcal{G}^*$.

Démonstration: Elle utilise essentiellement les définitions des différents opérateurs et les axiomes définissant la structure de quasi-bigèbre de Lie. La relation (3.21) est une évidence; la relation (3.22) suit de (3.7). La relation (3.23) est une conséquence de (3.8). $\triangle$

Dans la théorie des bigèbres de Lie, ξ^μ est appelé le **caractère adjoint** de $\mathcal{G}$ et x^γ le **caractère adjoint** de $\mathcal{G}^*$ ([12]). On montre dans ce cas que le laplacien de la bigèbre de Lie $(\mathcal{G}, \mu, \gamma)$ est

$$L = \frac{1}{2}(ad_{x^\gamma}^{\mu} - ad_{\xi^\mu}^{\gamma *})$$

et son application duale est

$$L^* = \frac{1}{2}(-ad_{x^\gamma}^{\mu *} + ad_{\xi^\mu}^{\gamma}).$$

4 Représentation de $\mathcal{D} = \mathcal{G} \bowtie \mathcal{G}^*$ sur $\Lambda\mathcal{G}$

Dans cette section, on montre qu'il existe une structure de $\mathcal{D}$-module, ou de manière équivalente une représentation de $\mathcal{D}$, sur $\Lambda\mathcal{G}$, puis on montre que $\Lambda\mathcal{D}$ et $End(\Lambda\mathcal{G})$, comme $\mathcal{D}$-modules, sont isomorphes. Pour cela nous utilisons les constructions de ([12]) dans le cas des bigèbres de Lie basées sur la théorie des algèbres de Clifford ([9]). Nous avons le résultat suivant:

Théorème 4.1 *Soit $(\mathcal{G}, \mu, \gamma, \phi)$ une quasi-bigèbre de Lie. L'application linéaire*

$$\Re : \mathcal{D} \to End(\Lambda\mathcal{G}) : x + \xi \to \Re_x + \Re_\xi$$

définie par

$$\Re_x(Y) = d_\gamma(x) \wedge Y + ad_x^\mu Y - \frac{1}{2} < \xi^\mu, x > Y$$

$$\Re_\xi(Y) = -i_{d_\mu(\xi)} Y + ad_\xi^{\gamma *} Y - (i_\xi \phi) \wedge Y + \frac{1}{2} < x^\gamma, \xi > Y$$

pour $x \in \mathcal{G}$, $\xi \in \mathcal{G}^*$ et $Y \in \Lambda\mathcal{G}$, est une représentation de $\mathcal{D}$ sur $\Lambda\mathcal{G}$.

Démonstration: Pour montrer que $\Re$ est une représentation de $\mathcal{D}$ sur $\Lambda\mathcal{G}$, il suffit d'établir les relations suivantes:

$$\Re_{[x,y]_\mathcal{D}} = \Re_{\mu(x,y)} = [\Re_x, \Re_y], \forall x, y \in \mathcal{G};$$

$$\Re_{[x,\xi]_\mathcal{D}} = -\Re_{ad_\xi^{\gamma *} x} + \Re_{ad_x^{\mu *}\xi} = [\Re_x, \Re_\xi], \forall x \in \mathcal{G}, \forall \xi \in \mathcal{G}^*;$$

$$\Re_{[\xi,\eta]_{\mathcal{D}}} = \Re_{\phi(\xi,\eta)} + \Re_{\gamma(\xi,\eta)} = [\Re_\xi, \Re_\eta], \forall \xi, \eta \in \mathcal{G}^*.$$

Prouvons tout d'abord que $\Re_{\mu(x,y)} = [\Re_x, \Re_y], \forall x, y \in \mathcal{G}$; en effet, par définition, puis en utilisant la condition de 1-cocycle et la relation (3.21) du lemme 3.3, on a pour tout $Y \in \Lambda\mathcal{G}$:

$$\begin{aligned}
\Re_{\mu(x,y)}(Y) &= d_\gamma(\mu(x,y)) \wedge Y + ad^\mu_{\mu(x,y)} Y - \tfrac{1}{2} < \xi^\mu, \mu(x,y) > Y \\
&= [d_\gamma(x), y]^\mu \wedge Y + [x, d_\gamma(y)]^\mu \wedge Y + [ad^\mu_x, ad^\mu_y](Y).
\end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}
[\Re_x, \Re_y](Y) &= \Re_x(\Re_y(Y)) - \Re_y(\Re_x(Y)) \\
&= \Re_x(d_\gamma(y) \wedge Y + ad^\mu_y Y - \tfrac{1}{2} < \xi^\mu, y > Y) \\
&\quad - \Re_y(d_\gamma(x) \wedge Y + ad^\mu_x Y - \tfrac{1}{2} < \xi^\mu, x > Y) \\
&= [x, d_\gamma(y) \wedge Y]^\mu + d_\gamma(x) \wedge ad^\mu_y Y - [y, d_\gamma(x) \wedge Y]^\mu \\
&\quad - d_\gamma(y) \wedge ad^\mu_x Y + [ad^\mu_x, ad^\mu_y](Y) \\
&= [d_\gamma(x), y]^\mu \wedge Y + [x, d_\gamma(y)]^\mu \wedge Y + [ad^\mu_x, ad^\mu_y](Y).
\end{aligned}$$

D'où $\Re_{\mu(x,y)} = [\Re_x, \Re_y], \forall x, y \in \mathcal{G}$.

Prouvons a présent que $-\Re_{ad^{\gamma*}_\xi x} + \Re_{ad^{\mu*}_x \xi} = [\Re_x, \Re_\xi], \forall x \in \mathcal{G}, \forall \xi \in \mathcal{G}^*$; en effet, par définition, puis en utilisant la relation (3.14) du lemme 3.1 et la proposition 3.2, on a pour tout $Y \in \Lambda\mathcal{G}$:

$$\begin{aligned}
-\Re_{ad^{\gamma*}_\xi x}(Y) + \Re_{ad^{\mu*}_x \xi}(Y) &= -(d_\gamma(ad^{\gamma*}_\xi x)) \wedge Y - ad^\mu_{ad^{\gamma*}_\xi x} Y \\
&\quad + \tfrac{1}{2} < \xi^\mu, ad^{\gamma*}_\xi x > Y - i_{d_\mu(ad^{\mu*}_x \xi)} Y \\
&\quad + ad^{\gamma*}_{ad^{\mu*}_x \xi} Y - (i_{ad^{\mu*}_x \xi} \phi) \wedge Y \\
&\quad + \tfrac{1}{2} < x^\gamma, ad^{\mu*}_x \xi > Y. \\
&= -(ad^{\gamma*}_\xi d_\gamma(x)) \wedge Y - (ad^\mu_x i_\xi \phi) \wedge Y \\
&\quad - [ad^\mu_x, i_{d_\mu \xi}](Y) + [ad^\mu_x, ad^{\gamma*}_\xi](Y) \\
&\quad + \textstyle\sum_i (-1)^{i+1} ad^{\gamma*}_{ad^{\mu*}_{y_i} \xi} x \wedge \hat{Y}_i + (i_{d_\mu(\xi)} d_\gamma(x)).
\end{aligned}$$

En utilisant le lemme 3.2, on obtient

$$\begin{aligned}
-\Re_{ad^{\gamma*}_\xi x}(Y) + \Re_{ad^{\mu*}_x \xi}(Y) &= -(ad^{\gamma*}_\xi d_\gamma(x)) \wedge Y - (ad^\mu_x i_\xi \phi) \wedge Y \\
&\quad - [ad^\mu_x, i_{d_\mu \xi}](Y) + [ad^\mu_x, ad^{\gamma*}_\xi](Y) \\
&\quad + i_{d_\mu(\xi)}(d_\gamma(x) \wedge Y) - (d_\gamma(x)) \wedge i_{d_\mu(\xi)} Y.
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
[\Re_x, \Re_\xi](Y) &= \Re_x(\Re_\xi(Y)) - \Re_\xi(\Re_x(Y)) \\
&= \Re_x(-i_{d_\mu(\xi)}Y + ad_\xi^{\gamma *}Y - (i_\xi\phi) \wedge Y + \tfrac{1}{2} < x^\gamma, \xi > Y) \\
& \quad \Re_\xi(d_\gamma(x) \wedge Y + ad_x^\mu Y - \tfrac{1}{2} < \xi^\mu, x > Y) \\
&= -(ad_\xi^{\gamma *} d_\gamma(x)) \wedge Y - (ad_x^\mu i_\xi \phi) \wedge Y \\
& \quad -[ad_x^\mu, i_{d_\mu(\xi)}](Y) + [ad_x^\mu, ad_\xi^{\gamma *}](Y) \\
& \quad +i_{d_\mu(\xi)}(d_\gamma(x) \wedge Y) - d_\gamma(x) \wedge i_{d_\mu(\xi)} Y.
\end{aligned}$$

Par comparaison, on trouve que $-\Re_{ad_\xi^{\gamma *}x} + \Re_{ad_x^{\mu *}\xi} = [\Re_x, \Re_\xi], \forall x \in \mathcal{G}, \forall \xi \in \mathcal{G}^*$.
Montrons enfin que $\Re_{\phi(\xi,\eta)} + \Re_{\gamma(\xi,\eta)} = [\Re_\xi, \Re_\eta], \forall \xi, \eta \in \mathcal{G}^*$; en effet, par définition et en utilisant la condition de 1-cocycle, la relation 3.22 du lemme 3.3 et la proposition 3.2, on a pour tout $Y \in \Lambda\mathcal{G}$:

$$\begin{aligned}
\Re_{\phi(\xi,\eta)}(Y) + \Re_{\gamma(\xi,\eta)}(Y) &= (d_\gamma(\phi(\xi,\eta))) \wedge Y + ad_{\phi(\xi,\eta)}^\mu Y \\
& \quad -\tfrac{1}{2} < \xi^\mu, \phi(\xi,\eta) > Y - i_{d_\mu(\gamma(\xi,\eta))}(Y) + ad_{\gamma(\xi,\eta)}^{\gamma *} Y \\
& \quad -(i_{\gamma(\xi,\eta)}\phi) \wedge Y + \tfrac{1}{2} < x^\gamma, \gamma(\xi,\eta) > Y \\
&= (d_\gamma(\phi(\xi,\eta))) \wedge Y - i_{[d_\mu(\xi),\eta]^\gamma}(Y) - i_{[\xi,d_\mu(\eta)]^\gamma}(Y) \\
& \quad +[ad_\xi^{\gamma *}, ad_\eta^{\gamma *}](Y) - (i_{\gamma(\xi,\eta)}\phi) \wedge Y \\
& \quad + \textstyle\sum_{i=1}^m (-1)^i (\phi(ad_{y_i}^{\mu *}\xi, \eta) + \phi(\xi, ad_{y_i}^{\mu *}\eta)) \wedge \hat{y}_i.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, en utilisant (3.15) et la proposition 2.2 adaptée à $[,]^\gamma$, on a

$$\begin{aligned}
[\Re_\xi, \Re_\eta](Y) &= \Re_\xi(-i_{d_\mu(\eta)}Y + ad_\eta^{\gamma*}Y - (i_\eta\phi)\wedge Y + \tfrac{1}{2} < x^\gamma, \eta > Y) \\
& -\Re_\eta(-i_{d_\mu(\xi)}Y + ad_\xi^{\gamma*}Y - (i_\xi\phi)\wedge Y + \tfrac{1}{2} < x^\gamma, \xi > Y) \\
&= -(ad_\xi^{\gamma*} i_{d_\mu(\eta)} - i_{d_\mu(\eta)} ad_\xi^{\gamma*})(Y) \\
& +(ad_\eta^{\gamma*} i_{d_\mu(\xi)} - i_{d_\mu(\xi)} ad_\eta^{\gamma*})(Y) \\
& +[ad_\xi^{\gamma*}, ad_\eta^{\gamma*}](Y) + (i_{d_\mu(\xi)} i_\eta\phi)\wedge Y \\
& -(i_{d_\mu(\eta)} i_\xi\phi)\wedge Y - (ad_\xi^{\gamma*} i_\eta\phi)\wedge Y + (ad_\eta^{\gamma*} i_\xi\phi)\wedge Y \\
&= (d_\gamma(\phi(\xi,\eta)))\wedge Y - i_{[d_\mu(\xi),\eta]^\gamma}(Y) - i_{[\xi, d_\mu(\eta)]^\gamma}(Y) \\
& +[ad_\xi^{\gamma*}, ad_\eta^{\gamma*}](Y) - (i_{\gamma(\xi,\eta)}\phi)\wedge Y \\
& +i_{d_\mu(\xi)}((i_\eta\phi)\wedge Y) - (i_\eta\phi)\wedge i_{d_\mu(\xi)}Y \\
& -i_{d_\mu(\eta)}((i_\xi\phi)\wedge Y) + (i_\xi\phi)\wedge i_{d_\mu(\eta)}Y.
\end{aligned}$$

En comparant les deux expressions, le lemme 3.2 nous permet de conclure que $\Re_{\phi(\xi,\eta)} + \Re_{\gamma(\xi,\eta)} = [\Re_\xi, \Re_\eta], \forall \xi, \eta \in \mathcal{G}^*$.

Ce qui achève la démonstration du théorème. $\triangle$

Remarque 4.1: Si $\phi = 0$, on retrouve le résultat de Lu ([12]) dans le cas des bigèbres de Lie.

Remarque 4.2: La représentation ci-dessus décrite ne préserve pas la graduation dans $\Lambda\mathcal{G}$.

Corollaire 4.1 *L'application suivante*

$$\Gamma : x + \xi \in \mathcal{D} \to \Gamma_{(x+\xi)} : End(\Lambda\mathcal{G}) \to End(\Lambda\mathcal{G})$$

définie par

$$\Gamma_{(x+\xi)}(T) = \Re_{(x+\xi)}T - T\Re_{(x+\xi)}$$

pour $x \in \mathcal{G}$, $\xi \in \mathcal{G}^*$ et $T \in End(\Lambda\mathcal{G})$, est une représentation de $\mathcal{D}$ sur $End(\Lambda\mathcal{G})$.

Pour définir l'isomorphisme de $\mathcal{D}$-modules entre $\Lambda\mathcal{D}$ et $End(\Lambda\mathcal{G})$, comme dans le cas des bigèbres de Lie ([12]), on introduit l'élément

$$exp_\wedge \mathbf{r} = \mathbf{r} + \frac{1}{2!}\mathbf{r}\wedge\mathbf{r} + \frac{1}{3!}\mathbf{r}\wedge\mathbf{r} + ... \in \Lambda\mathcal{D}$$

où

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2}\sum_i e_i \wedge \xi^i$$

est l'élément définissant la structure canonique de quasi-bigèbre de Lie sur $\mathcal{D}$. Pour $A = \xi_i \wedge ... \wedge \xi_k \in \mathcal{G}^*$, posons $\hat{A} = \xi_k \wedge ... \wedge \xi_1$. On a le résultat suivant:

Théorème 4.2 *Pour $U \in \Lambda\mathcal{D}$, posons*

$$i_{exp_\wedge \mathbf{r}} U = \sum_j X_j \otimes A_j \in \Lambda\mathcal{D} \cong \Lambda\mathcal{G} \otimes \Lambda\mathcal{G}^*$$

où $X_j \in \Lambda\mathcal{G}$ et $A_j \in \Lambda\mathcal{G}^*$. Définissons

$$Q(U) \in End(\Lambda\mathcal{G}) : Q(U)(Y) = \sum_j X_j \wedge i_{\hat{A}_j} Y.$$

Alors l'application

$$Q : \Lambda\mathcal{D} \to End(\Lambda\mathcal{G})$$

est un isomorphisme de $\mathcal{D}$-modules, où $\mathcal{D}$ agit sur $\Lambda\mathcal{D}$ par l'action adjointe et sur $End(\Lambda\mathcal{G})$ par l'application Γ.

Démonstration: Il s'agit de montrer que $\forall x + \xi \in \mathcal{D}$, on a

$$\Gamma_{(x+\xi)} \circ Q = Q \circ ad_{(x+\xi)}.$$

Plus précisement, $\forall x + \xi \in \mathcal{D}$, $\forall U \in \Lambda\mathcal{D}$ et $\forall Y \in \Lambda\mathcal{G}$, on doit avoir

$$(\Gamma_{(x+\xi)}(Q(U)))(Y) = (Q(ad_{(x+\xi)}(U)))(Y).$$

En effet, $\forall x \in \mathcal{G}$, $\forall U = X \in \Lambda\mathcal{G}$ et $\forall Y \in \Lambda\mathcal{G}$, on a par définition de Q, $Q(X))(Y) = X \wedge Y$; d'où

$$\begin{aligned}
\Gamma_x(Q(X)))(Y) &= \Re_x(Q(X)(Y)) - Q(X)(\Re_x(Y)) \\
&= \Re_x(X \wedge Y) - Q(X)(d_\gamma(x) \wedge Y + ad^\mu_x Y - \tfrac{1}{2} < \xi^\mu, x > Y) \\
&= d_\gamma(x) \wedge X \wedge Y + ad^\mu_x(X \wedge Y) - \tfrac{1}{2} < \xi^\mu, x > (X \wedge Y) \\
&\quad - X \wedge d_\gamma(x) \wedge Y - X \wedge (ad^\mu_x Y) + \tfrac{1}{2} < \xi^\mu, x > (X \wedge Y) \\
&= (ad_x X) \wedge Y = Q(ad_x(X))(Y).
\end{aligned}$$

Ce qui prouve la relation pour $x \in \mathcal{G}$ et $U = X \in \Lambda\mathcal{G}$.
Prouvons la relation pour $\xi \in \mathcal{G}^*$ et $U = X \in \Lambda\mathcal{G}$. En effet, $\forall Y \in \Lambda\mathcal{G}$

$$\begin{aligned}
\Gamma_\xi(Q(X))(Y) &= \Re_\xi(Q(X)(Y)) - Q(X)(\Re_\xi(Y)) \\
&= \Re_\xi(X \wedge Y) - Q(X)(-i_{d_\mu(\xi)} Y + ad^{\gamma^*}_\xi Y \\
&\quad -(i_\xi \phi) \wedge Y + \tfrac{1}{2} < x^\gamma, \xi > Y) \\
&= -i_{d_\mu(\xi)}(X \wedge Y) + ad^{\gamma^*}_\xi (X \wedge Y) \\
&\quad -(i_\xi \phi) \wedge (X \wedge Y) + \tfrac{1}{2} < x^\gamma, \xi > (X \wedge Y) \\
&\quad +X \wedge (i_{d_\mu(\xi)} Y) - X \wedge (ad^{\gamma^*}_\xi Y) \\
&\quad +X \wedge (i_\xi \phi) \wedge Y - \tfrac{1}{2} < x^\gamma, \xi > (X \wedge Y) \\
&= -i_{d_\mu(\xi)}(X \wedge Y) + X \wedge (i_{d_\mu(\xi)} Y) + (ad^{\gamma^*}_\xi X) \wedge Y.
\end{aligned}$$

Pour calculer $Q(ad_\xi(X))(Y)$, $\mathcal{G}$ étant supposée de dimension finie, on peut considérer X et Y comme des éléments décomposables de $\Lambda\mathcal{G}$, i.e. $X = x_1 \wedge ... \wedge x_m$ et $Y = y_1 \wedge ... \wedge y_n$; par définition de $[,]_\mathcal{D}$

$$\begin{aligned} ad_\xi X &= ad_\xi^{\gamma^*} X - \textstyle\sum_{k=1}^m x_1 \wedge ... \wedge (ad_{x_k}^{\mu^*}\xi) \wedge ... \wedge x_m \\ &= ad_\xi^{\gamma^*} X - \textstyle\sum_{k=1}^m (-1)^{n-k} \hat{X}_k \wedge (ad_{x_k}^{\mu^*}\xi), \end{aligned}$$

où $\hat{X}_k = x_1 \wedge ... \wedge \hat{x_k} \wedge ... \wedge x_m$. Ce qui nous permet d'avoir

$$\begin{aligned} i_\mathbf{r}(ad_\xi X) &= -\tfrac{1}{2}(-1)^{m-1} \textstyle\sum_{k=1}^m \sum_i (-1)^{m-k} i_{\xi^i}(\hat{X}_k) \wedge i_{e_i}(ad_{x_k}^{\mu^*}\xi) \\ &= -\tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{k=1}^m \sum_i \sum_{l=1}^m (-1)^{k+l} (i_{\xi^i} x_l) \hat{X}_{kl} \wedge (i_{e_i}(ad_{x_k}^{\mu^*}\xi)) \\ &= -\tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m (-1)^{k+l} (i_{x_l}(ad_{x_k}^{\mu^*}\xi)) \hat{X}_{kl} \\ &= -\textstyle\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m (-1)^{k+l} (i_{d_\mu \xi}(x_k \wedge x_l)) \hat{X}_{kl} \\ &= -i_{d_\mu \xi} X \end{aligned}$$

où $\hat{X}_{kl} = x_1 \wedge ... \wedge \hat{x_k} \wedge ... \wedge \hat{x_l} \wedge ... \wedge x_m$. Ainsi

$$\begin{aligned} i_{exp_\wedge \mathbf{r}}(ad_\xi X) &= ad_\xi X + i_\mathbf{r}(ad_\xi X) \\ &= ad_\xi^{\gamma^*} X - \textstyle\sum_{k=1}^m (-1)^{m-k} \hat{X}_k \wedge (ad_{x_k}^{\mu^*}\xi) - i_{d_\mu \xi} X. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} Q(ad_\xi(X))(Y) &= (ad_\xi^{\gamma^*} X) \wedge Y - (i_{d_\mu \xi} X) \wedge Y \\ &\quad + \textstyle\sum_{k=1}^m (-1)^{m-k} \hat{X}_k \wedge (i_{ad_{x_k}^{\mu^*}\xi} Y) \\ &= (ad_\xi^{\gamma^*} X) \wedge Y - (i_{d_\mu \xi} X) \wedge Y \\ &\quad + \textstyle\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n (-1)^{m-k-l} (i_{d_\mu \xi}(x_k \wedge y_l)) \hat{X}_k \wedge \hat{Y}_l. \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} i_{d_\mu \xi}(X \wedge Y) &= (i_{d_\mu \xi} X) \wedge Y + X \wedge (i_{d_\mu \xi} X) \\ &\quad - \textstyle\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n (-1)^{m-k-l} (i_{d_\mu \xi}(x_k \wedge y_l)) \hat{X}_k \wedge \hat{Y}_l. \end{aligned}$$

En définitive, on trouve

$$Q(ad_\xi(X))(Y) = -i_{d_\mu(\xi)}(X \wedge Y) + X \wedge (i_{d_\mu(\xi)} Y) + (ad_\xi^{\gamma^*} X) \wedge Y.$$

La relation est donc prouvée pour tout $x + \xi \in \mathcal{D}$, $\forall U = X \in \Lambda\mathcal{G}$ et $\forall Y \in \Lambda\mathcal{G}$.

Pour tout $x \in \mathcal{G}$, $\forall U = A \in \Lambda\mathcal{G}^*$ et $\forall Y \in \Lambda\mathcal{G}$, on a par définition de Q

$$Q(A)(Y) = i_{\hat{A}} Y$$

et

$$\begin{aligned}
\Gamma_x(Q(A))(Y) &= \Re_x(Q(A)(Y)) - Q(A)(\Re_x(Y)) \\
&= \Re_x(i_{\hat{A}}Y) - i_{\hat{A}}(\Re_x(Y)) \\
&= d_\gamma(x) \wedge i_{\hat{A}}Y + ad^\mu_x i_{\hat{A}}Y - \tfrac{1}{2} < \xi^\mu, x > i_{\hat{A}}Y \\
&\quad -i_{\hat{A}}(d_\gamma(x) \wedge Y) - i_{\hat{A}} ad^\mu_x Y + \tfrac{1}{2} < \xi^\mu, x > i_{\hat{A}}Y \\
&= -i_{\hat{A}}(d_\gamma(x) \wedge Y) + d_\gamma(x) \wedge i_{\hat{A}}Y + [ad^\mu_x, i_{\hat{A}}](Y).
\end{aligned}$$

Calculons $Q(ad_x(A))(Y)$; pour cela supposons que $A = \xi_1 \wedge ... \wedge \xi_m$ avec $m \leq |Y|$. Par définition de $[,]_{\mathcal{D}}$

$$\begin{aligned}
ad_x A &= \textstyle\sum_{k=1}^m (-1)^k (ad^{\gamma^*}_{\xi_k} x) \wedge \hat{A}_k + ad^{\mu *}_x A \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^m (-1)^k (i_{\xi_k} d_\gamma(x)) \wedge \hat{A}_k + ad^{\mu *}_x A
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
i_{exp_\wedge \mathbf{r}}(ad_x A) &= ad_x A + i_{\mathbf{r}}(ad_x A) \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^m (-1)^k (i_{\xi_k} d_\gamma(x)) \wedge \hat{A}_k + ad^{\mu *}_x A + i_{d_\gamma(x)} A.
\end{aligned}$$

Ainsi, par définition de Q

$$Q(ad_x(A))(Y) = i_{ad^{\mu *}_x \hat{A}} Y + \sum_{k=1}^m (-1)^k (i_{\xi_k} d_\gamma(x)) \wedge i_{\hat{A}_k} Y + i_{i_{d_\gamma(x)} \hat{A}} Y.$$

Mais

$$i_{ad^{\mu *}_x \hat{A}} Y = [ad^\mu_x, i_{\hat{A}}](Y);$$

$$i_{i_{d_\gamma(x)} \hat{A}} Y = \sum_{k,l=1}^m (-1)^{k+l} (i_{\xi_l} i_{\xi_k} d_\gamma(x)) i_{\hat{A}_{kl}} Y$$

et

$$\begin{aligned}
i_{\hat{A}}(d_\gamma(x) \wedge Y) &= -\textstyle\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m (-1)^{k+l} (i_{\xi_l} i_{\xi_k} d_\gamma(x)) i_{\hat{A}_{kl}} Y \\
&\quad + \textstyle\sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} (i_{\xi_k} d_\gamma(x)) i_{\hat{A}_k} Y + d_\gamma(x) \wedge i_{\hat{A}} Y.
\end{aligned}$$

En définitive

$$Q(ad_x(A))(Y) = -i_{\hat{A}}(d_\gamma(x) \wedge Y) + d_\gamma(x) \wedge i_{\hat{A}}Y + [ad^\mu_x, i_{\hat{A}}](Y).$$

D'où

$$\Gamma_x(Q(A))(Y) = Q(ad_x(A))(Y), \qquad \forall x \in \mathcal{G}, \forall U = A \in \Lambda\mathcal{G}^*, \forall Y \in \Lambda\mathcal{G}.$$

Pour tout $\xi \in \mathcal{G}^*$, $\forall U = A \in \Lambda\mathcal{G}^*$ et $\forall Y \in \Lambda\mathcal{G}$, on a par définition de Q

$$Q(A)(Y) = i_{\hat{A}}Y$$

et

$$\begin{aligned}\Gamma_\xi(Q(A))(Y) &= \Re_\xi(Q(A)(Y)) - Q(A)(\Re_\xi(Y))\\ &= \Re_\xi(i_{\hat{A}}Y) - i_{\hat{A}}(\Re_\xi(Y))\\ &= [ad^{\gamma *}_\xi, i_{\hat{A}}](Y) - (i_\xi\phi)\wedge i_{\hat{A}}Y + i_{\hat{A}}((i_\xi\phi)\wedge Y)\\ &= [ad^{\gamma *}_\xi, i_{\hat{A}}](Y) + [i_{\hat{A}}, \varepsilon_{i_\xi\phi}](Y).\end{aligned}$$

En supposant que A est un élément décomposable de $\Lambda\mathcal{G}^*$, i.e. $A = \xi_1\wedge ...\wedge\xi_m$, on a par définition de $[,]_\mathcal{D}$

$$ad_\xi A = ad^\gamma_\xi A + \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\phi(\xi,\xi_k)\wedge\hat{A}_k.$$

Par un calcul, on trouve

$$Q(ad_\xi(A))(Y) = [ad^{\gamma *}_\xi, i_{\hat{A}}](Y) + [i_{\hat{A}}, \varepsilon_{i_\xi\phi}](Y).$$

Par conséquent

$$\Gamma_{(x+\xi)}(Q(A))(Y) = Q(ad_{(x+\xi)}(A))(Y), \quad \forall x+\xi\in\mathcal{D}, \forall U = A\in\Lambda\mathcal{G}^*, \forall Y\in\Lambda\mathcal{G}.$$

Pour une démonstration complète du théorème dans le cas général, nous allons nous servir d'un résultat de ([12]) où la démonstration est faite pour le cas des bigèbres de Lie. Pour cela, considérons l'opérateur

$$D : \Lambda\mathcal{G}\otimes\Lambda\mathcal{G}^* \to End(\Lambda\mathcal{G}) : D_{X\wedge A}(Y) = X\wedge i_{\hat{A}}Y.$$

Alors d'après ([12]), l'application

$$D\circ i_{exp_\wedge \mathbf{r}} : \Lambda\mathcal{G}\otimes\Lambda\mathcal{G}^* \to End(\Lambda\mathcal{G})$$

est un isomorphisme de $\mathcal{D}$-modules d'algèbre de Lie. Pour conclure la démonstration du théorème, il suffit de remarquer que $Q = D\circ i_{exp_\wedge \mathbf{r}}$. $\triangle$

Remerciements: L'auteur remercie vivement le Centre Abdus Salam ICTP pour l'hospitalité et le soutien matériel qui ont permis la réalisation de ce travail.

Acknowledgments: This work was done within the framework of the Associateship Scheme of the Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Italy. Financial support from ICTP is acknowledged.

References

[1] M. Bangoura, *Quasi-bigèbres jacobiennes et généralisations des groupes de Lie-Poisson*, Thèse, Université de Lille 1 (France), 1995.

[2] M. Bangoura, *Quasi-bigèbres de Lie et algèbres quasi-Batalin-Vilkovisky différentielles*, Comm. in Algebra, 31 no 1, 29-44 (2003).

[3] M. Bangoura, Y. Kosmann-Schwarzbach, *The double of a Jacobian quasi-bialgebra*, Lett. Math. Physics, 28 (1993) 13-29.

[4] V. G. Drinfeld, *Hamiltonian structures on Lie groups, Lie bialgebras and the geometric meaning of the classical Yang-Baxter equations*, Soviet. Math. Dokl. 27 (1983), 68-71.

[5] V. G. Drinfeld, *Quasi-Hopf algebras, Leningrad Math. Journal*, 1 (6) (1990) 1419-1457.

[6] E. Getzler, *Manin pairs and topological conformal field theory*, Ann. of Physics 237 (1995) 161-201.

[7] Y. Kosmann-Schwarzbach, *Jacobian quasi-bialgebras and quasi-Poisson Lie groups*, Contemporary Mathematics 132 (1992) 459-489.

[8] Y. Kosmann-Schwarzbach, and F. Magri, *Poisson-Nijenhuis structures*, Ann. Inst. H. Poicaré, Physique Théorique, 53 (1990) 35-81.

[9] B. Kostant and S. Sternberg, *Symplectic reduction, BRS cohomology, and infinite dimensional Clifford algebras*, Ann. Physics. 176 (1) (1987), 49-113.

[10] J. L. Koszul, *Homologie et cohomologie des algèbres de Lie*, Bull. Soc. Math. France, 78 (1960) 65-127.

[11] J. L. Koszul, *Crochet de Schouten-Nijenhuis et cohomologie*, Astérisque, hors série, Soc. Math. France, Paris (1985) 257-271.

[12] J. H. Lu, *Lie bialgebras and Lie algebra cohomology*, Preprint 1996, non publié.