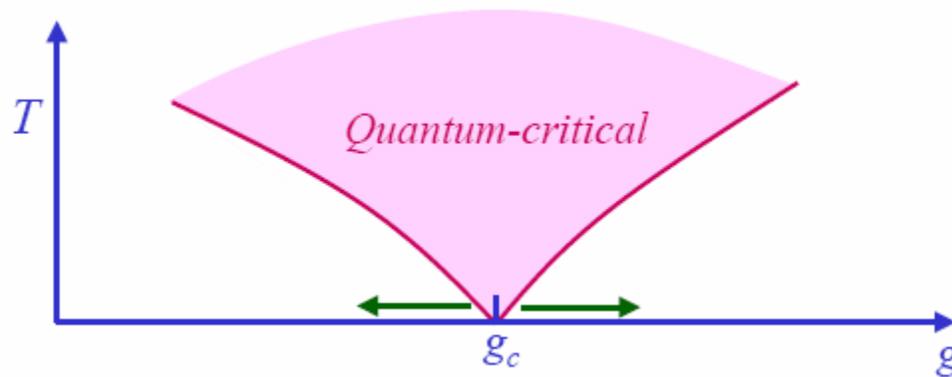


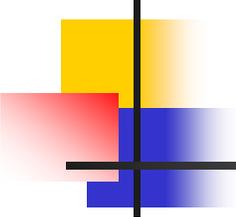


Institut für Theoretische Physik und Astrophysik
Universität Würzburg

Quanten Phasenübergänge

M.N.Kiselev





Überblick

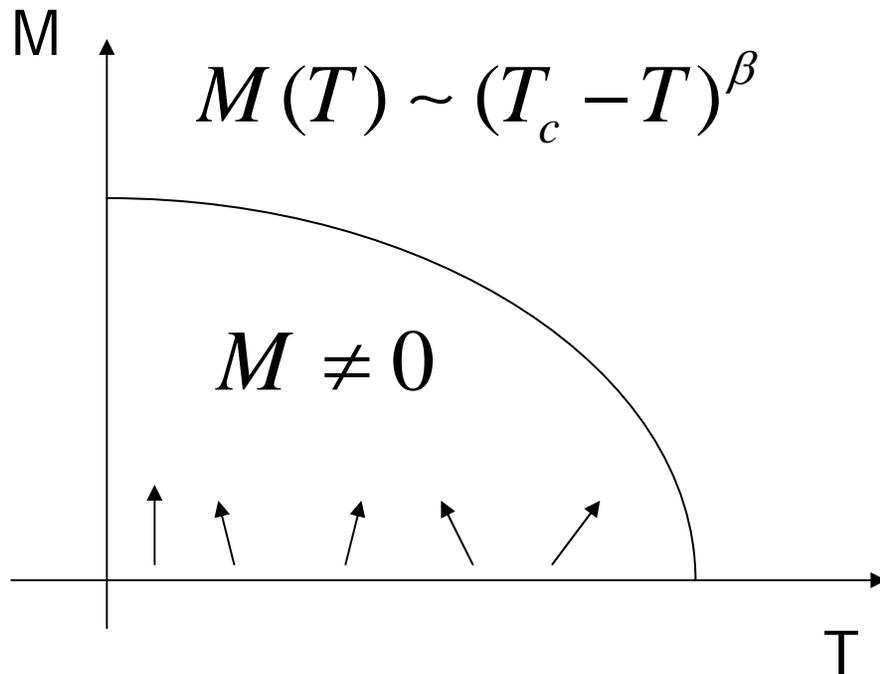
- **Klassische Phasenübergänge**
Phasenübergänge II. Ordnung
Phasenübergänge I. Ordnung
Landau Theorie
- **Quanten Phasenübergänge**
Allgemeine Theorie
Einfaches Beispiel
Millis-Hertz Theorie
- **Verschiedene Anwendungen**

Subir Sachdev. Quantum Phase Transitions. Cambridge University Press 1999
John A. Herz. Phys. Rev. B 14,1165 (1976)

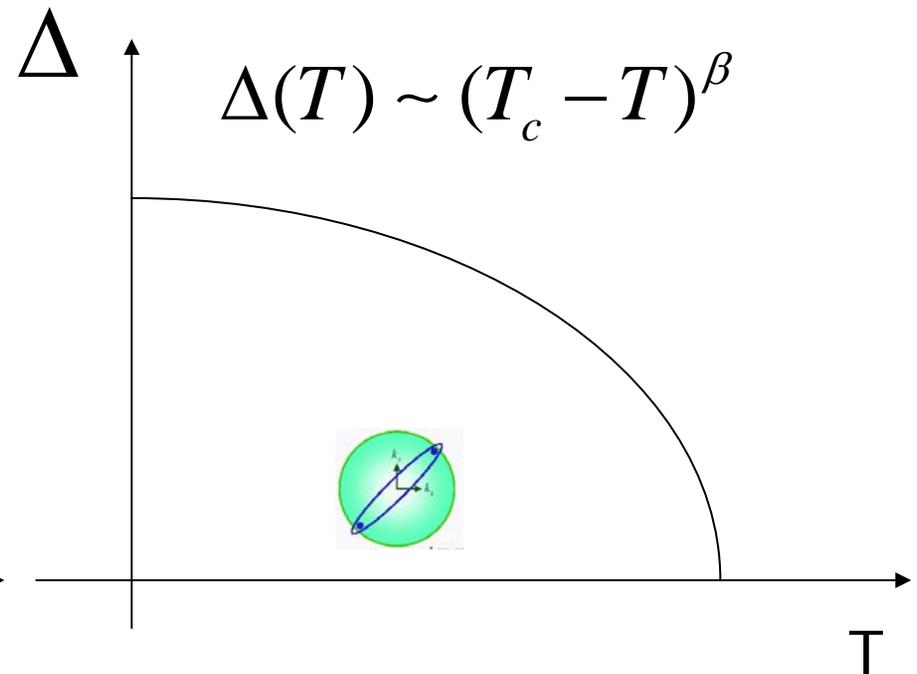
Klassische Phasenübergänge

Phasenübergänge II. Ordnung

Ferromagnete

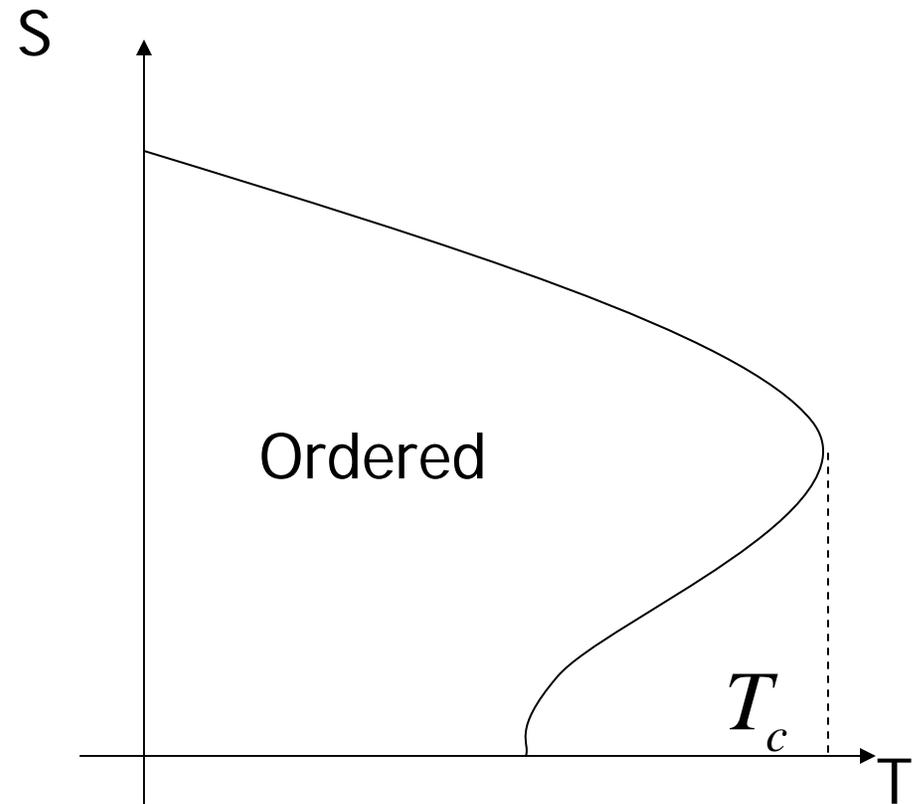
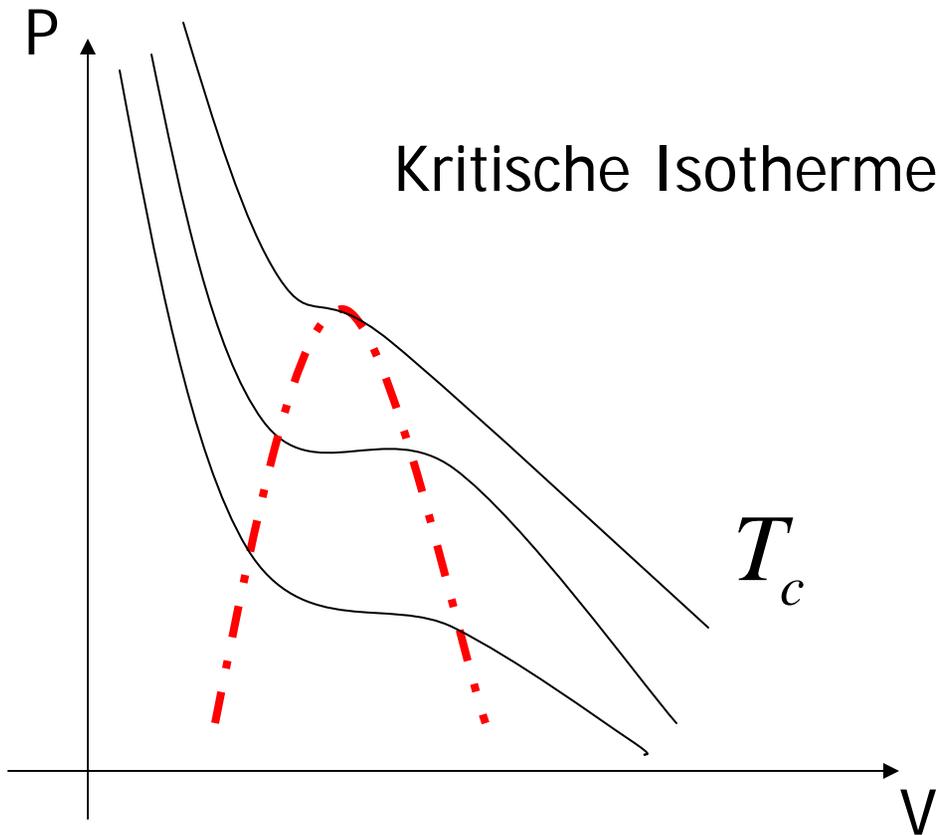


Supraleiter



Klassische Phasenübergänge

Phasenübergänge I. Ordnung

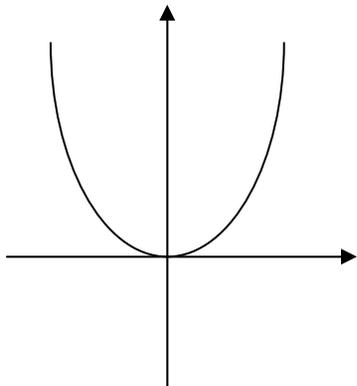


Landau Theorie für Phasenübergänge II. Ordnung

$$\Phi[\varphi] = \Phi_0 + \Phi_1\varphi + \Phi_2\varphi^2 + \Phi_3\varphi^3 + \Phi_4\varphi^4 + \dots$$

$$\Phi_1 = 0 \quad \Phi_3 = 0$$

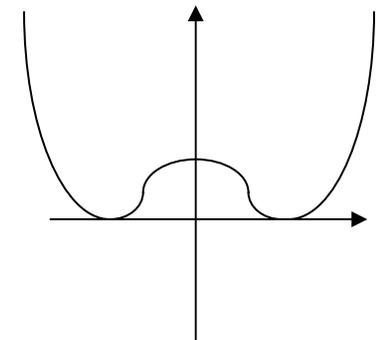
$$T > T_c$$



$$\Phi_2 = a(T - T_c)$$

$$\Phi_4 = \text{const} > 0$$

$$T < T_c$$



Kritische Exponenten

$$\tau = T - T_c$$

	Exp	Def	Bedingung
Spezifische Wärme	α	$ \tau ^{-\alpha}$	$\tau \rightarrow 0, B = 0$
Ordnungsparameter	β	$ \tau ^\beta$	$\tau \rightarrow 0^-, B = 0$
Suszeptibilität (T)	γ	$ \tau ^{-\gamma}$	$\tau \rightarrow 0, B = 0$
Suszeptibilität (B)	δ	$ B ^{1/\delta-1}$	$\tau = 0, B \rightarrow 0$
Korrelationslänge	ν	$ \tau ^{-\nu}$	$\tau \rightarrow 0, B = 0$
Korrelationsfunktion	η	$ r ^{-d+2-\eta}$	$\tau = 0, B = 0$
Dynamischer Exponent	z	$ \xi ^z$	$\tau \rightarrow 0, B = 0$

Landau Theorie für Phasenübergänge II. Ordnung

Gleichungen für kritische Exponenten

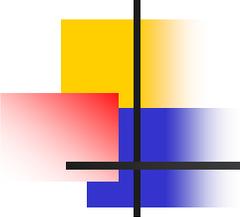
$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2$$

$$\beta + \gamma = \beta\delta$$

$$(2 - \eta)\nu = \gamma$$

$$2 - \alpha = d\nu$$

	α	β	γ	δ	ν	η
Landau	0	0.5	1	3	0.5	0
Scaling	0	1/3	4/3	5	2/3	0



Was ist ein Quanten Phasenübergang?

Hamiltonian

$$H = H(g)$$

Gap

$$\Delta = J |g - g_c|^{z\nu}$$

Korrelationslänge

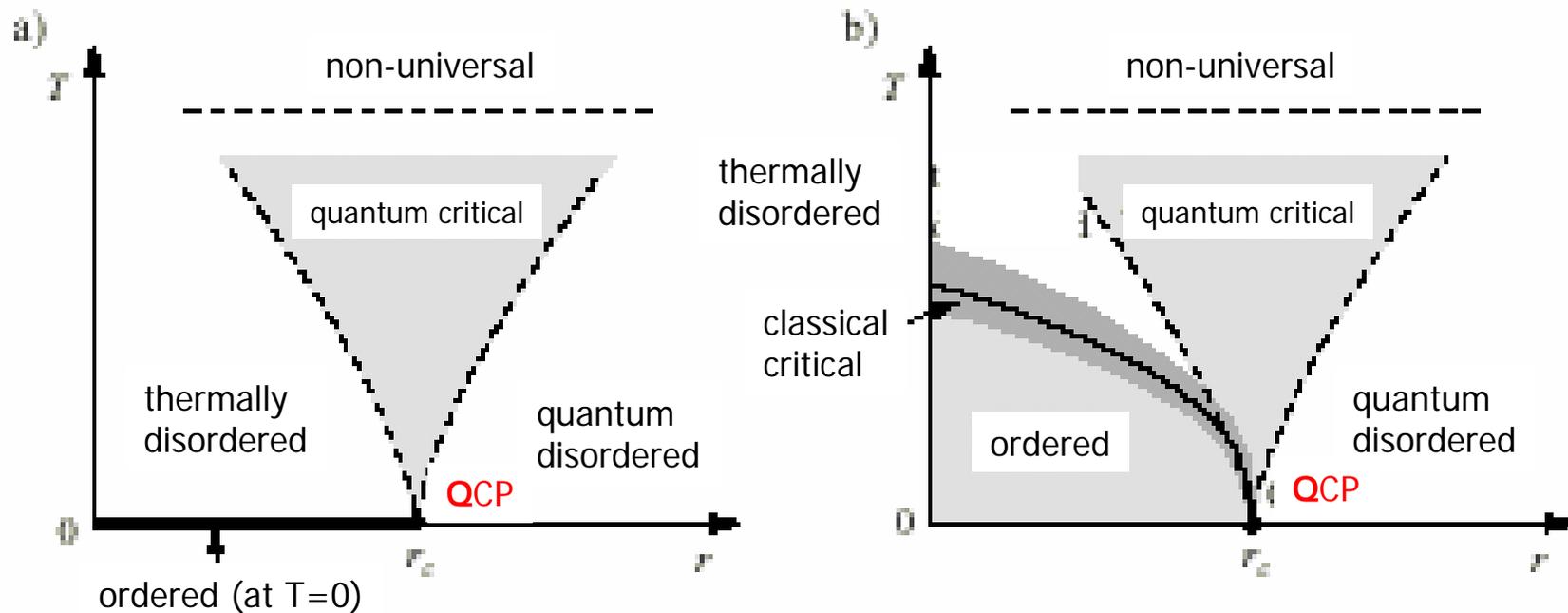
$$\xi = |g - g_c|^\nu$$

$$\Delta \sim \xi^{-z}$$

z - Dynamischer kritischer Exponent

Vergleich von Quanten und Klassischen Phasenübergängen

Zwei mögliche Phasendiagramme



Quantenfluktuationen verursacht durch das Heisenbergsche
Unschärfeprinzip

Ein einfaches Beispiele eines Quanten Phasenüberganges:

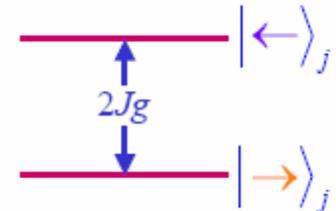
1D Ising Kette im transversalen Magnetfeld

$$H = -J \sum_i (g \sigma_i^x + \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z) = -Jg \sum_i (\sigma_i^x + \frac{1}{g} \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z)$$

a) schwache Kopplung $g \gg 1$

$$|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$$

$$|\leftarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)$$



Grundzustand

$$G = |\rightarrow \dots \rightarrow \rightarrow \dots \rightarrow\rangle - \frac{1}{2g} |\rightarrow \dots \leftarrow \leftarrow \dots \rightarrow\rangle$$

niedrigster angeregter Zustand

$$L = |\rightarrow \dots \rightarrow \dots \leftarrow \dots \rightarrow\rangle$$

umgedrehter Spin

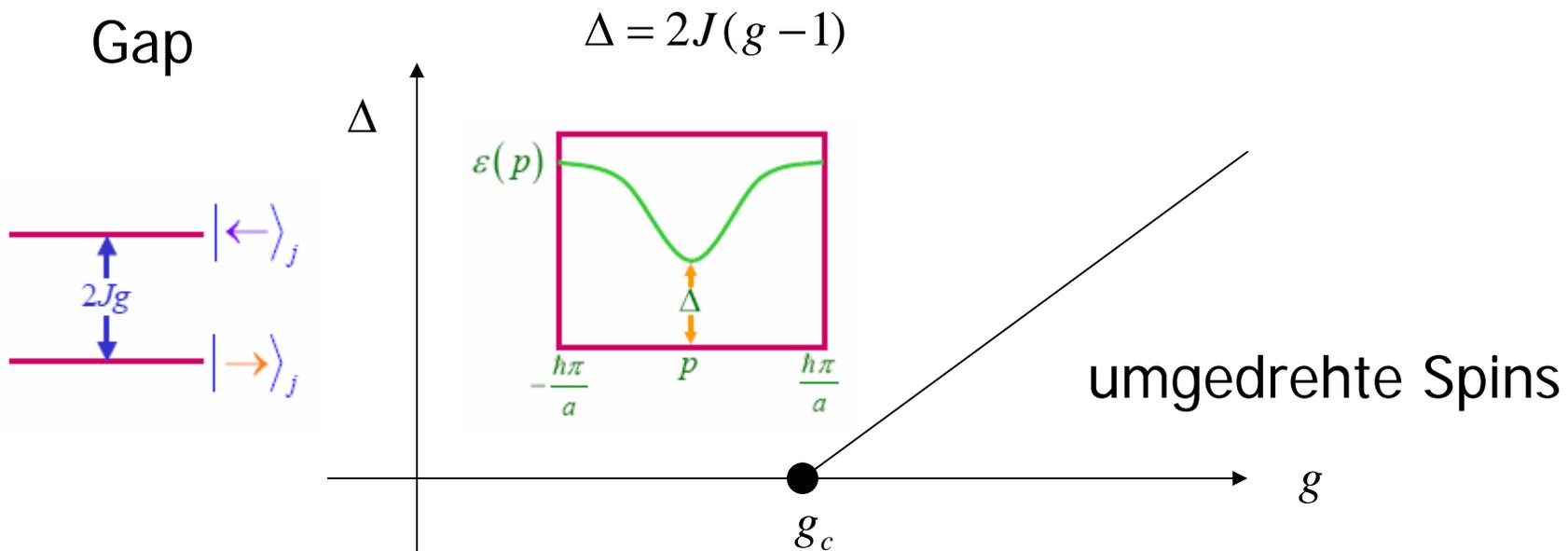
schwache Kopplung

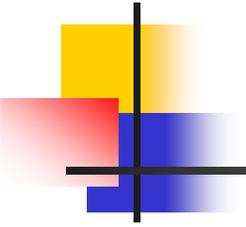
$$1/g \ll 1$$

$$|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j e^{ikx_j} |j\rangle$$

Anregungsspektrum $\varepsilon(p) = \langle p | H(g) | p \rangle = 2Jg - 2J \cos(pa)$

Gap





Starke Kopplung

$$1/g \gg 1$$

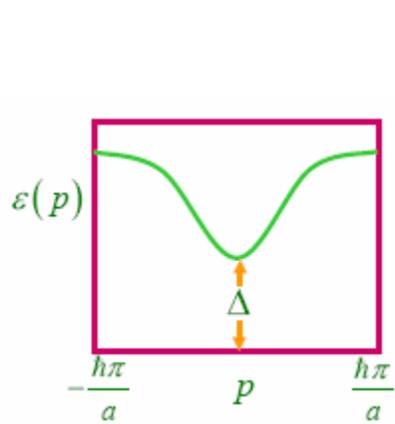
Zweifach entarteter Grundzustand

$$G_{\uparrow} = |\uparrow\uparrow \dots \uparrow \dots \uparrow\rangle$$

$$G_{\downarrow} = |\downarrow\downarrow \dots \downarrow \dots \downarrow\rangle$$

Anregungen - Domänenwände

$$|d\rangle = |\uparrow \dots \uparrow \downarrow \dots \downarrow\rangle$$

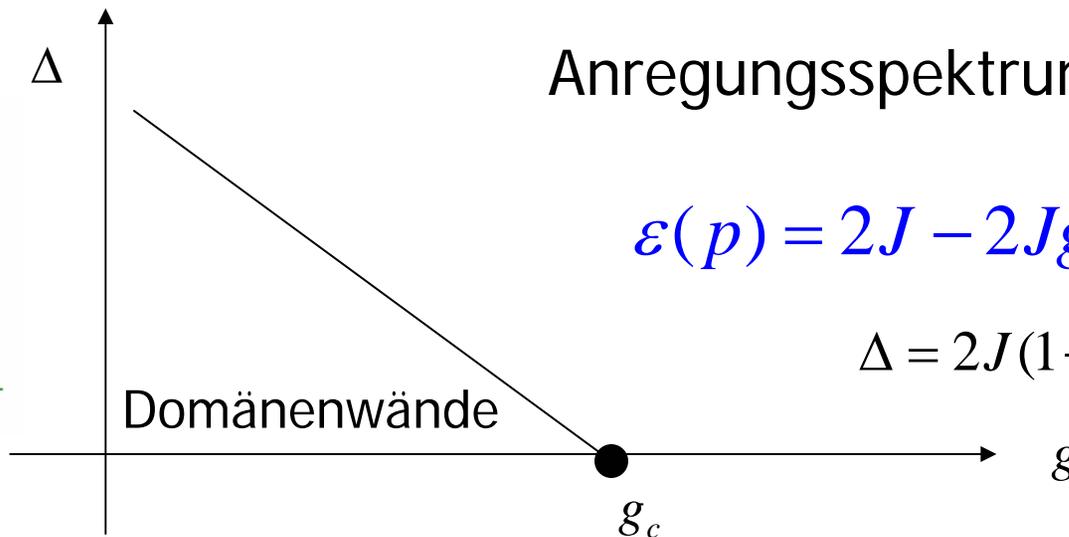


Anregungsspektrum

$$\varepsilon(p) = 2J - 2Jg \cos(pa)$$

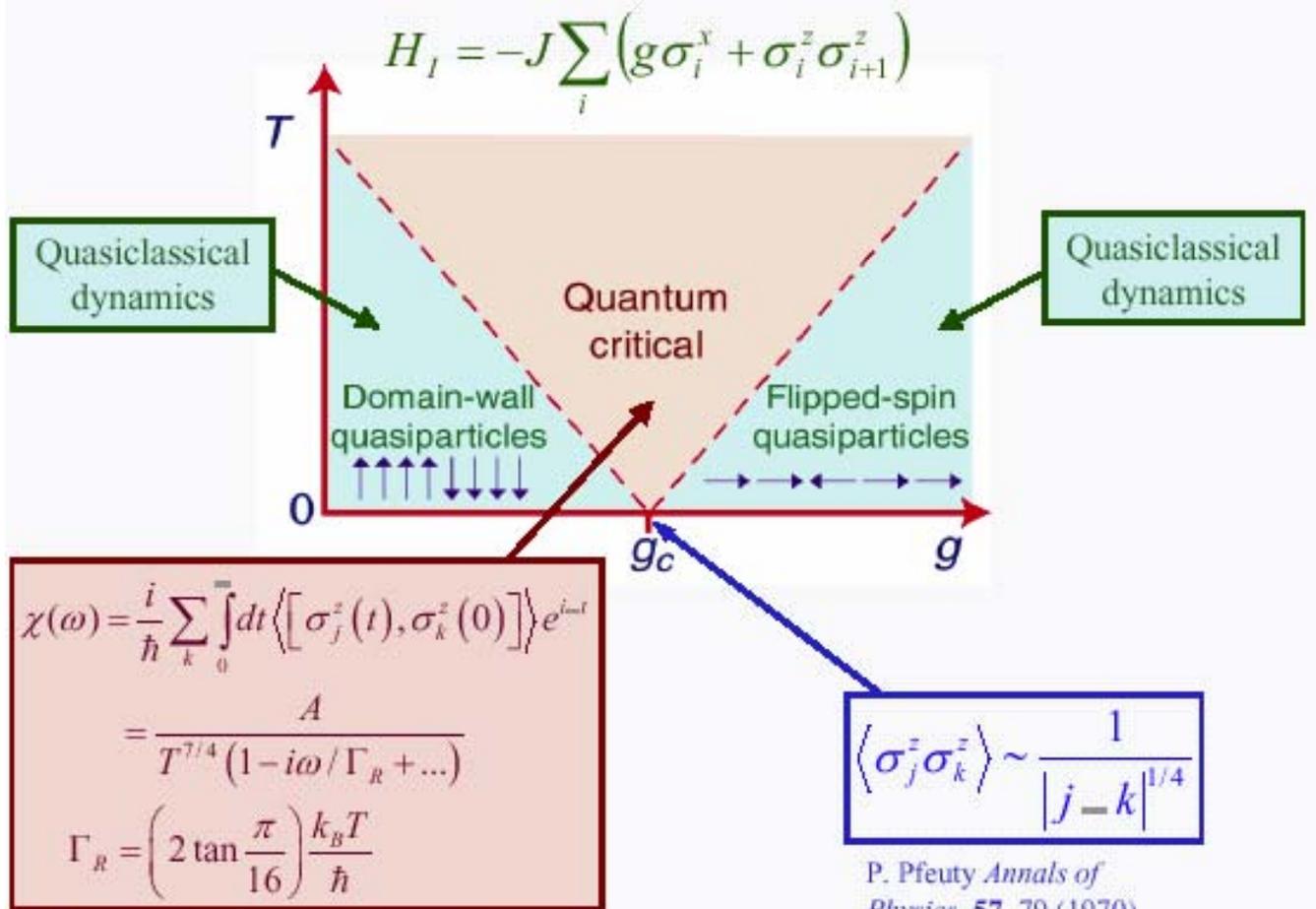
$$\Delta = 2J(1 - g)$$

Domänenwände



Exakte Lösung des Problems

$$\varepsilon(p) = 2J\sqrt{1 + g^2} - 2g \cos(p)$$

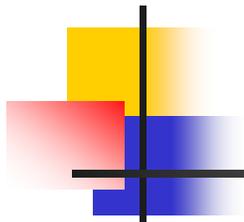


S. Sachdev and J. Ye, Phys. Rev. Lett. 69, 2411 (1992).
 S. Sachdev and A.P. Young, Phys. Rev. Lett. 78, 2220 (1997).

P. Pfeuty *Annals of Physics*, 57, 79 (1970)

Millis-Hertz Theorie

Skalare und Vektortheorie



Effektives Funktional für die skalare Theorie

$$\Phi[\Psi] = \frac{1}{2} \sum_{q\omega} \left(r_0 + q^2 + \frac{|\omega|}{q} \right) |\Psi(q, \omega)|^2 +$$
$$+ \frac{u_0}{4N\beta} \sum_{q\omega} \Psi(q_1, \omega_1) \Psi(q_2, \omega_2) \Psi(q_3, \omega_3) \Psi(-q_1 - q_2 - q_3, -\omega_1 - \omega_2 - \omega_3)$$

$$r_0 = 1 - UN(\varepsilon_F)$$

$$u_0 = \frac{1}{12} U^2 N''(\varepsilon_F)$$

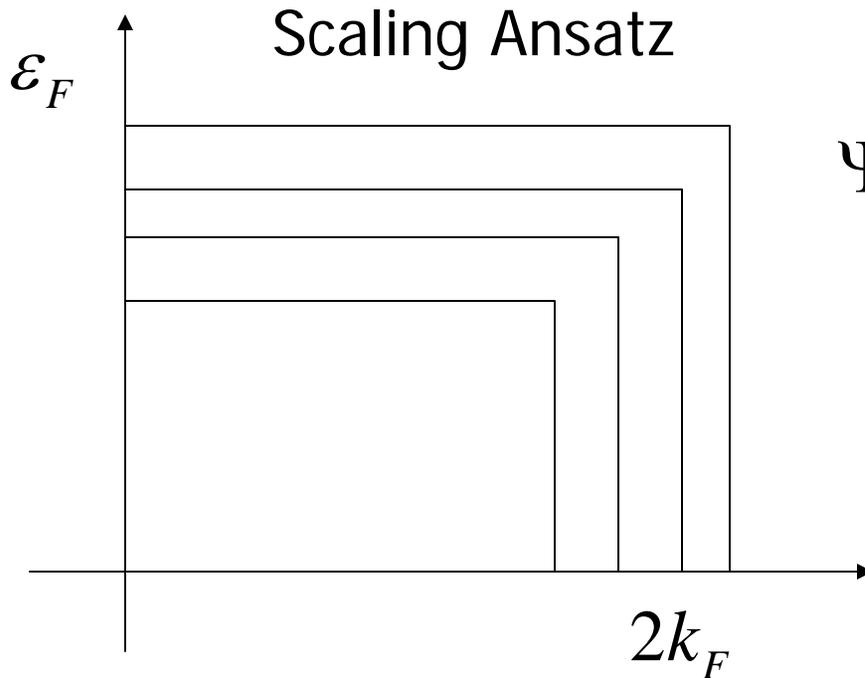
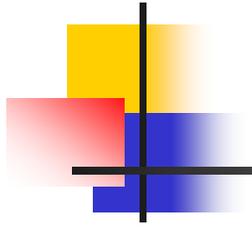
Effektives Funktional für die Vektortheorie

$$\Phi[\vec{S}] = \frac{1}{2} \sum_{q\omega} \left(\tilde{r}_0 + q^2 + \frac{|\omega|}{q} \right) |S_\alpha(q, \omega)|^2 +$$
$$+ \frac{\tilde{u}_0}{4N\beta} \sum_{q\omega} S_\alpha(q_1, \omega_1) S_\alpha(q_2, \omega_2) S_\beta(q_3, \omega_3) S_\beta(-q_1 - q_2 - q_3, -\omega_1 - \omega_2 - \omega_3)$$

J.Hertz, PRB 14, 1165 (1976),
A.Millis, PRB 48, 7183 (1993)

Millis-Hertz Theorie

Renormierungsgruppen Methode



$$K_d = \frac{4\Omega_d}{d(2\pi)^{d+1}}$$

$$q' = qe^l, \omega' = \omega e^{zl}$$

$$\Psi'(q', \omega') = e^{-(d+z+2)l/2} \Psi(q, \omega)$$

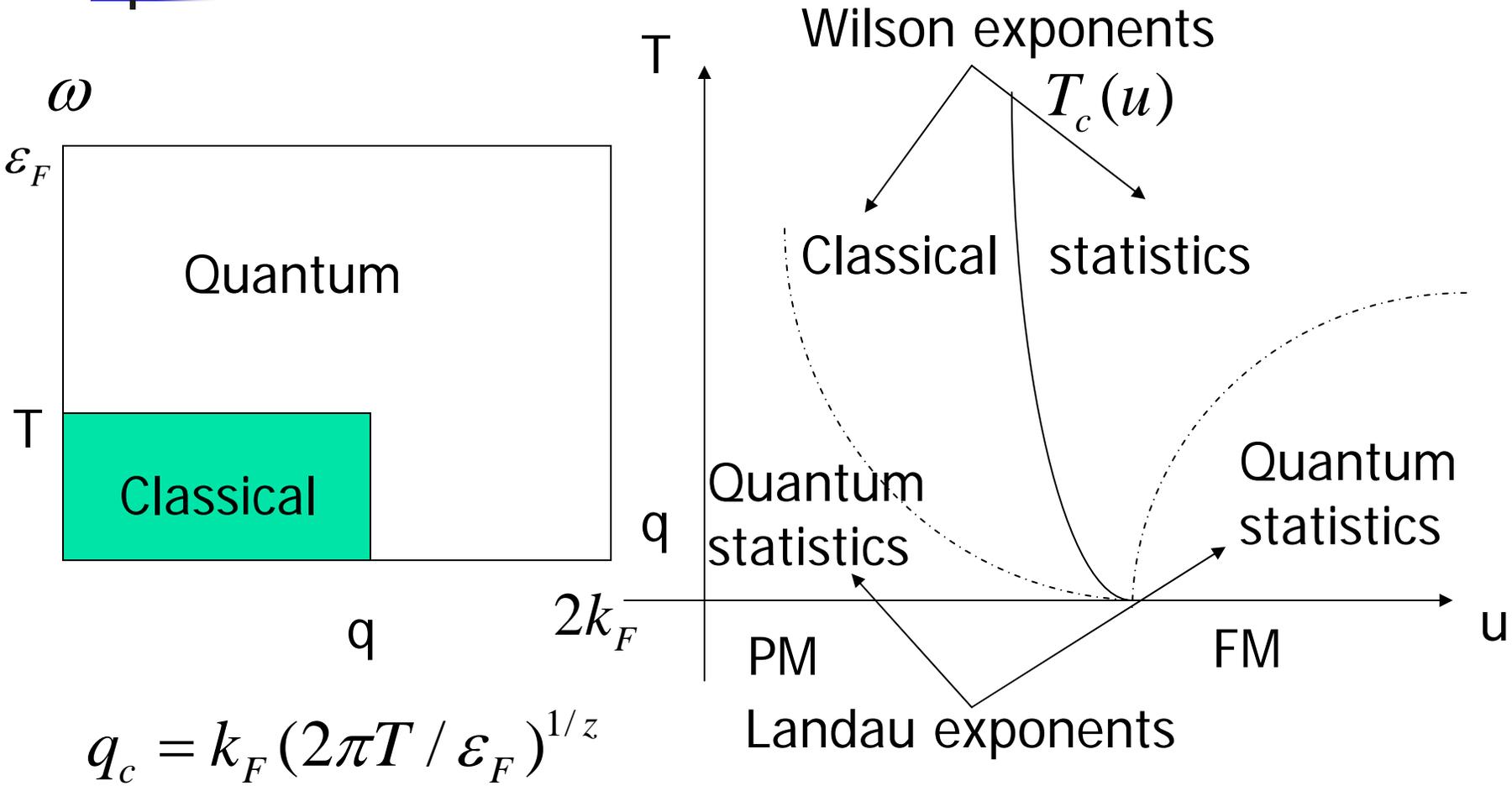
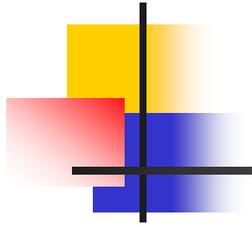
$$\varepsilon = 4 - (d + z)$$

$$\frac{dr}{dl} = 2r + \frac{3K_d u}{1+r},$$

$$\frac{du}{dl} = \varepsilon u - \frac{9K_d u^2}{(1+r)^2}$$

Millis-Hertz Theorie

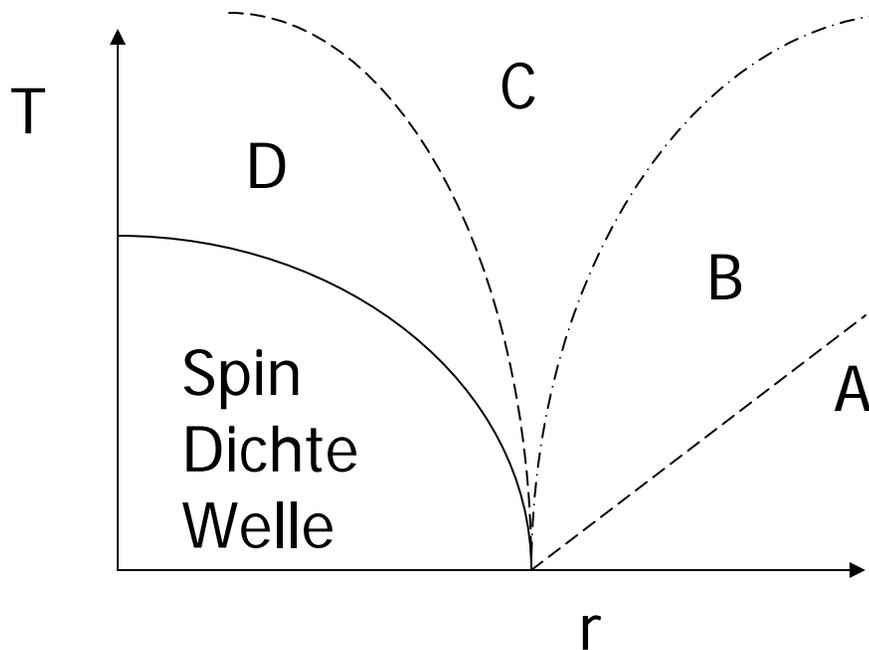
Phasendiagramme



Anwendungen von QPÜ: Fermiflüssigkeiten und verdünnte Bosegase

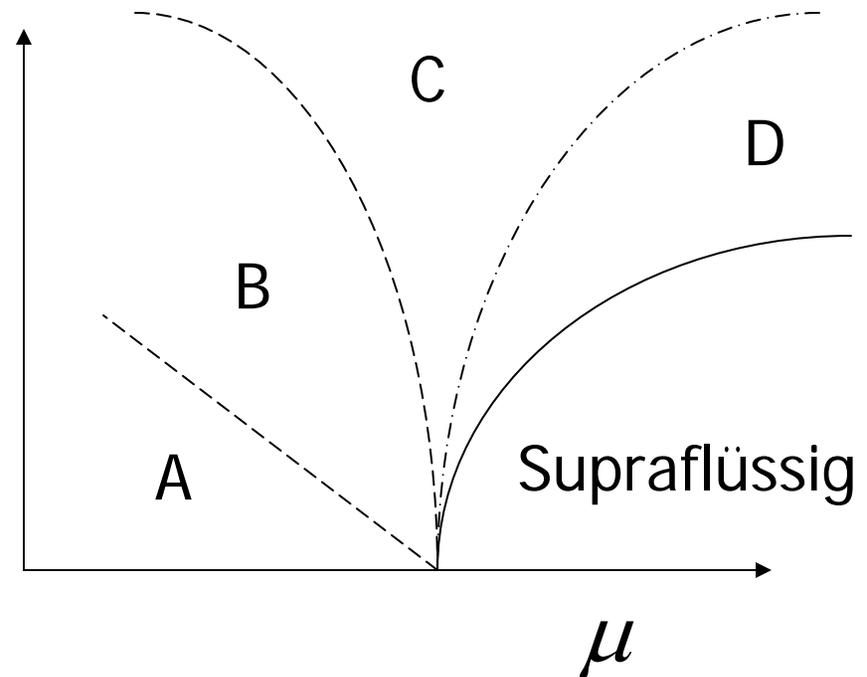
Fermiflüssigkeit

- A: Fermiflüssigkeit
- B: Region der klassischen Störungstheorie
- C: Quanten kritische Region
- D: Klassische kritische Region

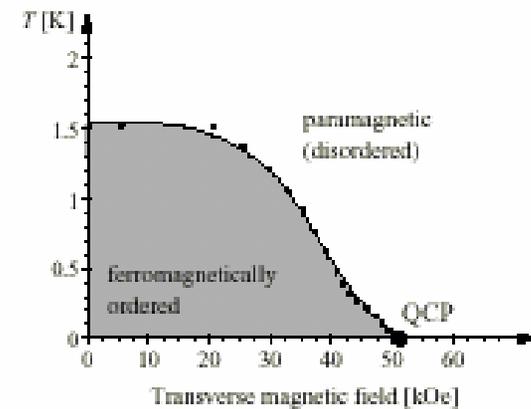
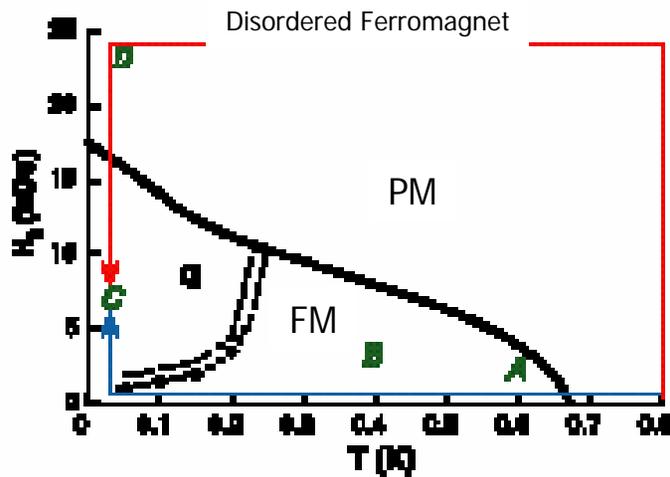
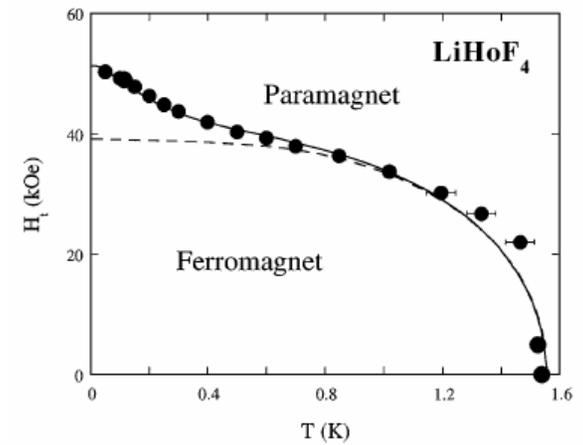
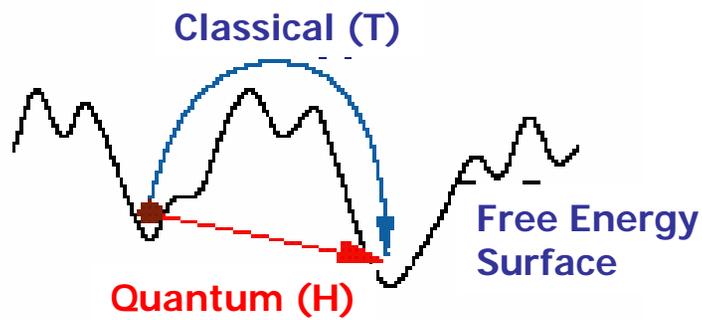


Bosegas

- A: Klassisches verdünntes Bosegas
- B: Region der klassischen Störungstheorie
- C: Quanten kritische Region
- D: Klassische kritische Region

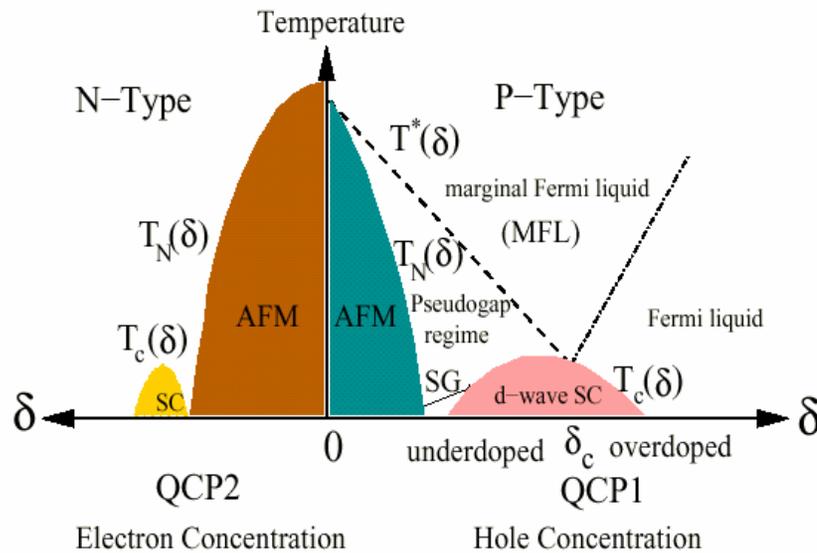


Anwendungen von QPÜ: $LiHoF_4$

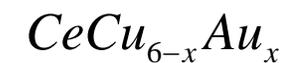
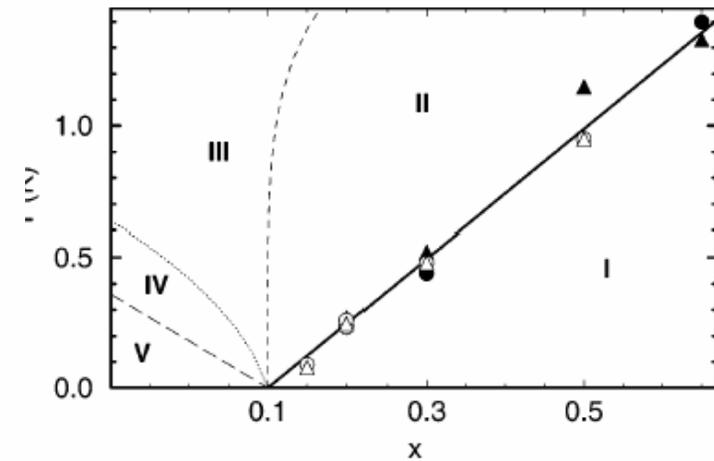


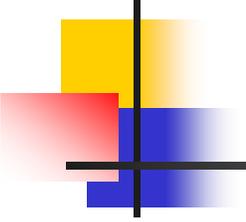
Anwendungen von QPÜ: schwere Fermionen und HTSL

Hochtemperatur Supraleiter



Schwere Fermionen





Zusammenfassung

- Quanten Phasenübergänge werden durch Quantenfluktuationen entsprechend dem Heisenbergschen Unschärfeprinzip verursacht
- Quantenkritische Fluktuationen sind möglicherweise verantwortlich für viele interessante Phänomene in niedrigdimensionalen Quantensystemen z.B. Nicht-Fermiflüssigkeiten, Quantenmagnetismus, Metall-Isolator Übergang usw.
- Quantenkritisches Verhalten kann messbare Größen über einen grossen Bereich des Phasendiagramms beeinflussen