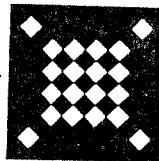


乱流のフラクタル構造

海外文献紹介



The Fractal Facets of Turbulence

K. R. Sreenivasan and C. Meneveau

(J. Fluid Mech. Vol. 173, 1986)

塩田 卓*抄訳

吉川 暲**抄訳

キーワード: 実験(Experiment), 流体力学(Fluid Mechanics), 乱流(Turbulence), フラクタル構造(Fractal Structure)

十分に発達した乱流は、さまざまな面でフラクタルであると推測されているが、それに対する確かな根拠付けはまだなされていない。この論文では、この隔たりを埋めるため、特に乱流・非乱流境界面、等速度面などの等値面、消散構造の三つの側面についてフラクタルかどうか、もしそうならそのフラクタル次元は幾つかについて調べ、さらに乱流の外見上は複雑な幾何学的様相を定量化しようとしている。結論としては、乱流の多くの様相はフラクタルによってほぼ表現でき、そのフラクタル次元を測定することが可能であるが、逆に乱流の幾つかの様相に対して、与えられた次元から乱流自体をいかに再現するか、あるいは再現できるかについては明らかではない。

はじめに

Richardson 以来、十分発達した乱流は階層的なスケール渦から成り立ち、より大きな渦が安定性を失うことによってより小さいスケールの渦を順繰りに生成していくと推測されている。この繰返しは、その特徴的な Re 数が1であるような十分安定するスケールで終わり、この下限スケールとコルモゴロフスケールのオーダーは同じである。このカスケード理論は、Richardson によって覚えやすい韻を踏んだ詩で表現され、Kolmogorov, Obukhov, Onsager, Weizsäcker らによって促進され、われわれの乱流に対する理解は飛躍的に向上した。

この乱流の特徴がフラクタル理論の乱流への適用の可能性を導いた。Mandelbrot は、“乱流は多くのフラクタル構造を含んでいる”と述べ、乱流の幾何学的様相にはフラクタルの概念が必ず含まれていると主張し、自ら研究を進めたが、“まだ確固たる結果はほとんど得られていない”。本論文の目的は、乱流を実際に測定することにより、この状況を改善することである。

通常の図形に対するユークリッド次元と同様に、フラクタル図形にもフラクタル次元と呼ばれる断片性や粗雑さの目安となる次元が考えられており、これは自己相似な図形が全体を比 ϵ で縮小して得られる図形 N 個からなるとき、 $D = \log N / \log(1/\epsilon)$ で表される。ただし、フラクタル集合を完全に記述するにはフラクタル次元のほかに、例えば空けき(隙)率とか、スケーリング関数の全スペクトルなどが必要である。より適切には、問題となるすべての幾何学的情報を含んでいる Feigenbaum が導いた形のスケーリング関数を使うことができるが、何らかの方法でそれを導いたとしても至るところ微分不可能で扱いにくい。

1. 乱流・非乱流境界面のフラクタル次元

1.1 背景

Re 数の大きい自由乱流せん断流れでは、明確な境界面によって乱流域と非乱流域とが分かれていることが観察されており(写真-1 参照)、境界層流れの外縁も同様である。Townsend によれば、乱流中の大きな渦が界面をねじ曲げており、また界面の可視化またはスペクトル解析により、ねじれはすべてのスケールに及ぶことがわかっている。したがって、スケールの相似性の概念か

* 大阪大学大学院工学研究科

** 大阪大学工学部環境工学科 正会員

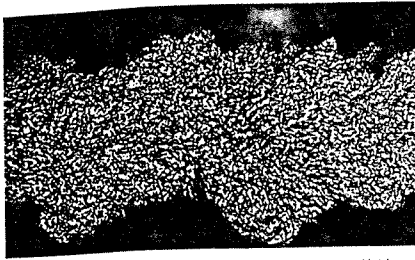


写真-1 大気中を超音速で通過する弾丸の後流のシャドウグラフ

ら、これらの境界面はフラクタル面であると予想できる。

一般に、乱流・非乱流境界面は、渦・非渦領域を分ける境界面であり、流れの三次元運動特有の渦伸展メカニズムがこの二つの領域を明確に分離し続けると考えられる。Corrsin と Kistler は、このような境界面が定義できることを示し、その特性についてもある程度詳細に研究した。

境界面のフラクタル次元は、それをサイズの小さい面要素で覆い、面要素の縮小率 ϵ による面積の変化を調べることによって決まる。十分にねじられた面では、測定面積は縮小率の増加に伴って無限に増加し、このとき面が自己相似なフラクタルであれば面積の増加は指数法則に従う。一般に、指数法則は、自己相似またはフラクタル的な挙動の徴候である。次元が D_3 (添え字の 3 は、三次元空間中に境界面が存在していることを示す) の真のフラクタル面の場合、面積は式 (1), (2) に従って無限に増加する。

$$N = \epsilon^{-D_3} \quad \dots\dots (1)$$

または、

$$D_3 = \log N / \log (1/\epsilon) \quad \dots\dots (2)$$

これは、フラクタル次元の計算に用いられる標準的な関係式である。これを古典的な面、例えば単位面積の正方形に当てはめた場合、 $D_3=2$ となる。フラクタル面の場合、式 (2) で計算される次元は 2 よりも大きい。これはフラクタル面がその入組み具合の程度が大きいために、面と立体の中間に位置することを意味する。

フラクタル面を完全に特定するには、フラクタル次元のほかに面要素の位置や方向性といった付加的な情報が必要である。しかし、次元は面の入組み具合に関する基本的な量であり、例えば燃焼に関連して、ある面の入組み具合では重要な意味をもっている。

1.2 低次元断面から得られる次元

面のフラクタル次元を前述の直接的な方法によって測定するのは困難なので、低次元断面による方法を採用する。次元 D_2 のフラクタル境界面をもつ物体を平面で切断したとき、ユークリッド幾何学からの類推により、切

断面の境界線の次元 D_2 と D_3 の間には、式 (3) の関係が予想される。

$$D_3 = D_2 + 1 \quad \dots\dots (3)$$

同様に、物体を線要素で切断して得られるコントロール集合と同種の点の集合の次元 D_1 には、式 (4) の関係が予想される。

$$D_3 = D_1 + 2 \quad \dots\dots (4)$$

この法則には例外があるが、断面の取り方がフラクタル自体と独立な場合には成立する。すなわち、フラクタルがもし等方的ならば、切断面や切断線の方向は関係がない。この点に関しては、1.3, 1.4 で議論する。

境界面は、すべてのスケールで相似ではなく、予想ではコルモゴロフスケールにおいて下限が、また流れのスケールか、より小さいスケールにおいて上限が存在し、この間のスケールでのみフラクタルであると予想できる。このように、フラクタルの概念を現実の状況に適用する場合、必然的に切り捨てられるスケールが存在する。 Re 数が大きい流れでは、広範囲のスケールで相似が成り立ち、フラクタル的な挙動を同定しやすいと予想できるが、われわれの実験は計測装置上の制約から、 Re 数が中程度で、積分スケールとコルモゴロフスケールとの比がわずか数百のものに限定された。それでも得られた結果は、公表するのに十分耐え得るものである。

1.3 面切断による次元

二次元断面は、実際には流れに抵抗のない煙などのマーカーを流し、薄いスリット光でその断面を照らし、写真に撮ることによって得られ、これから乱流と非乱流領域の間の“境界線”の次元を測定することになる。断面の厚さは原理的には無限に薄くしなければならないが、実際にはコルモゴロフの長さスケールより小さいか同程度であれば有限な厚さでも構わない。その理由は、コルモゴロフ厚さが乱流運動の最小スケールなので、有限な厚さによる“ぼやけ”は無視できるからである。

煙などによる流れの可視化写真は、マーカーの拡散性に関連したつぎの二つの理由によって、真の境界面であるべき渦領域を示さない。一つは、煙がエアロゾル(油霧)からなり、その拡散係数が分子粘性より小さいため、有効 Schmidt 数が比較的大きいので、流れの最小スケールと最小可視スケールの間に差異が生ずるからである。二つ目のより重要なことは、煙を渦の発生する場所に正確に置き、境界面を十分に示すことが厳密には不可能なことである。もし、煙を観察地点からかなり上流に置くと、流下していく間に影響を受けるため、観察地点の挙動や幾何学的形状を正確に示すとは限らない。しかし、可視化領域にかなり近いが、拡散する時間がないほど近くはないような領域に注入すれば、乱流が煙をかな



写真-2 平板上の乱流境界層の煙

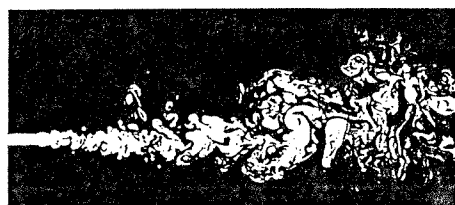


写真-3 レーザ光によって可視化した軸対称噴流の断面

り速くかき混ぜるので境界面を大まかに示すと期待できる。例えば、水素気泡や熱などによって示した境界面から得られる統計量は、運動量などの方法から得られるものとよく一致する。われわれもわずかに熱した噴流中の速度の2成分、レイノルズ応力、温度の変動を同時に記録し、熱などのスカラー量が境界面を示すのに有効であることを確認した。ただし、これらは厳密には煙・非煙の境界面である。

別の問題は、特にここで研究しているような非等方性流れでは、測定する断面の方向によってフラクタル次元が異なってくることである。われわれは、この点に関して研究を続けているが、この論文の結果は代表的なものである。

写真-2は煙によって可視化した境界層の断面である。この写真では、乱流域に囲まれた非乱流域の島や乱流域の穴が存在する。写真-1のような写真がこの特徴を示さないのは、光路に沿ってトレーサの像を積分するような方法によって得られているからである。Dimotakis, Lye と Papantoniou が最初にこの事実を指摘し、幾つかの乱流噴流の写真を作成した。写真-3に、このうちの一つを転載する。

ここで、境界線のフラクタル次元 D_2 を測定する方法を考える。島の海岸線などと同様に、境界線の長さは縮小率の増加に伴い、つぎの関係式に従って増加する。

$$L = K\varepsilon^{1-D_2} \quad \dots\dots (5)$$

ここに、

ε : 縮小率に関係した長さスケール

K : フラクタル集合の空げき率に関係した定数

しかし、この方法はアルゴリズムが複雑でその適用が困難なため、Mandelbrot や Grebogi らの中で紹介されている別の簡単な方法を採用した。これは、あまり知られていないようなので簡単に説明しておく。

境界線から距離 ε 以内にある乱流域と非乱流域の両方を考える。 L を境界線の長さとし、境界線の回りに幅 2ε の細長い帯をとると、その面積 $2\varepsilon L$ は式(5)から明らかに ε^{2-D_2} で変化する。さまざまな ε についてこの面積を測定すれば、 $\log - \log$ のグラフの傾きから D_2 が求められる。具体的には、以下の手順で行う。前述の方法で得られた流れの像をデジタル化し、それぞれのディ

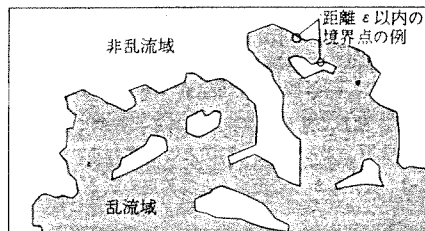


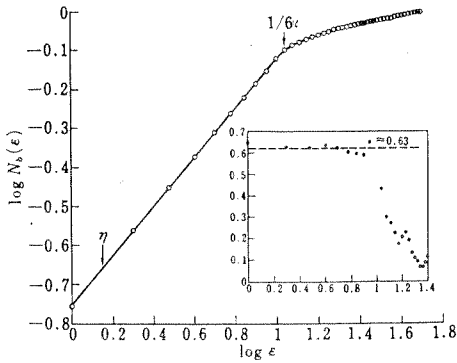
図-1 デジタル化像の概要

ジタル化された点における光の強さを求める。つぎに、光の強さに適当ないき(閾)値を設定して、乱流域と非乱流域を区別する。ここで、いき値の値自体は後に示す理由により、以下の結果にあまり重要でない。こうして、図-1のような像が得られる。この境界線の次元の測定をコンピュータ処理で行う方法は、つぎのとおりである。デジタル化されたそれぞれの点の回りに半径 ε の円を描き、近接した大きい黒点と小さい黒点の間を補間して得られる境界線とこの円が交わるときは、その点が距離 ε 以内にある境界点として計数し、すべての境界点の数 $N_b(\varepsilon)$ を求める。これをいろいろな ε について繰り返し、 ε に対する $N_b(\varepsilon)$ の変化を決定する。この章の初めの議論から、式(6)を得る。

$$N_b(\varepsilon) \propto \varepsilon^{2-D_2} \quad \dots\dots (6)$$

式(6)の中で量 $2-D_2$ は、余次元(Codimension)である。ほとんどの非カオス的な系では、初期の ε の不確かさは最終状態に同程度の不確かさを及ぼすだけであるが、フラクタルの物体では最終状態に大きな不確かさを及ぼし、 ε^{D_2} に比例する。ここで、 D_2 は余次元である。この余次元は、3. で再び扱う。

図-2は、写真-2から得た $\log N_b(\varepsilon)$ と $\log \varepsilon$ のグラフで、内側の図は曲線の傾きを表している。図では、フラクタルと考えられる傾き一定の領域が存在し、この領域の下限は、コルモゴロフスケールとほぼ同じであり、上限は $1/6$ 付近とみられる。ここで、 l は乱流境界層中の流れに直角な方向の積分スケールで、これは $y/\delta=0.4$ に固定したプローブと外側に動くプローブの2点相関測定によって得られる。しかし、すでに画像処理過程での限界により、上限はカットオフされているので $1/6$ とは決められない。上限について統計的に信頼できる値を得るためには像の中により大きいスケールを取り込む必要が



注 流れは、激しく乱れた境界層である。内側の図から、平均の傾き=1.37, よって $D_3=2.37$ と予想される。

図-2 境界線からの距離 ϵ と境界点の数 N_b の関係

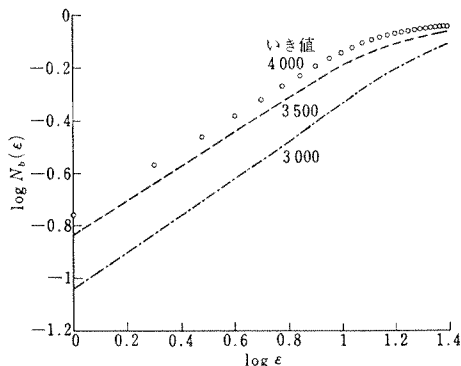


図-3 いき値の余次元への影響

あるが、これは像をデジタル化するときの容量が有限なために困難である。この問題は、1.4の線切断を用いて解決する。

図-3は、いき値の次元への影響を調べるため、図-2のいき値を約±15%と変化させたものである。少なくとも光の強さのいき値が3000~4000(単位は写真の明るさの最大が12000, 最小が0としたもの)の範囲では、 ϵ の指数はほぼ一定である。つぎに、よく知られているフラクタル(二次のコッホ島)や通常の物体(黒い正方形)に“検定”実験を行った結果、図-4のようにコッホ島の余次元は0.5であり、これから $D_2=1.5$, 正方形では $D_2=1$ となり、これらは理論値に一致する。

以上から、図-2でスケールの相似性が成り立つのは、 η から l の何分の1かまでの範囲で、この厳密な値は後に決まり、さらに境界線に対して $D_2=2-\eta$ 傾き=1.38, よって境界面に対して $D_3=2.38$ と結論できる。

図-5は、軸対称な水噴流を大きなタンク内の静止した水の中へ垂直に流し込んだときのデータである。噴流中にはポリスチレンの小球を混入し、小球と重力による影響は無視できると考えた。噴流の発達領域($x/D=30$ 付近)に薄いスリット光を照らし、前と同様にその断面を

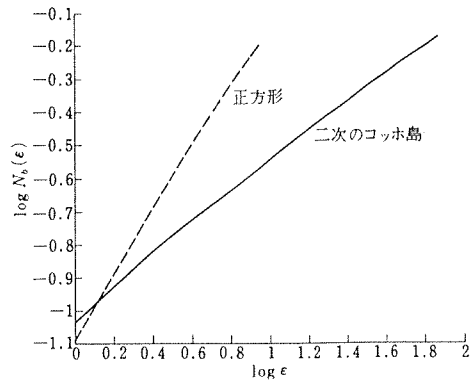
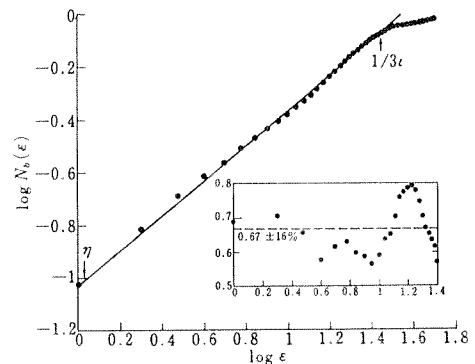


図-4 画像法の検定実験



注 噴流出口の Re 数: 約 2500, 直径 $D=5$ mm, $x/D=30$

図-5 境界線からの距離 ϵ と境界点の数 N_b の関係

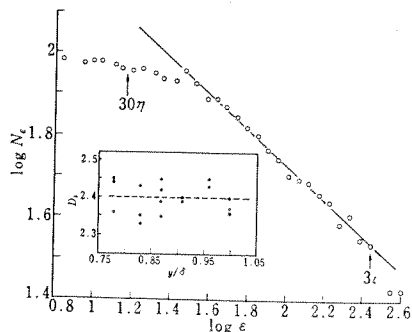
写真に撮り、デジタル化した。スケールの相似性は、せいぜい η から l の何分の1かまでの範囲であるが、上限が境界層での $l/6$ の代わりに $l/3$ であり、傾きも境界層の場合とは少し異なるという事実は無視できる。後者は、データの分散の範囲に収まり、これについては1.4で述べる。

次元を決めるに当たり、壁または噴流の軸から近すぎず、また遠すぎない領域を選び、噴流でも境界層では $0.6 < \gamma < 0.1^*$ の範囲の像をデジタル化した。ここで、 γ は間欠率である。われわれは、経験的にこの領域が画像処理に最適であると考えた。

1.4 線切断によって得られる次元

テーラーの凍結場の仮説に従い、 η がより小さい熱線プローブで測定した速度信号に適切ないき値や保持時間を設定して間欠係数を求め、得られた間欠係数と元の信号を比較して保持時間といき値の妥当性を確かめた。水平な線と間欠係数の交点の集合の次元 D_1 は、式(2)を線要素に適用したいわゆる Box-Counting 法により、集合を覆うのに必要な長さ ϵ の線要素の数 N_ϵ をいろいろな ϵ の値について計数して求めた。

* 訳者注 誤記と思われる。



注 対応する間欠率は、最大から最小へ 0.41, 0.24, 0.19, 0.13, 0.10, 0.08 である。

図-6 乱流境界層 ($y/\delta=0.91$, $U_\infty=12$ m/s) での間欠率および ϵ と N_e の関係

図-6 は、境界層流れにおける N_e と ϵ のデータの典型的な例である。この図では、かなり広い範囲で傾きが一定で、すぐに $D_1=0.4$ が得られ、 $D_2=1.4$, $D_3=2.4$ と推定できる。線切断から求めた D_1 は、1.3 で面切断から求めた D_2 より近似的に 1 小さく、1.2 の低次元断面による方法に対して多少の正当性を与える。自己相似な領域は、面切断のときのように η までには至らず、 30η までのスケールでさえ直線上には乗らない。この理由の一部は、明らかにテラーの仮説と熱線の大きさ(今の場合、約 10η)の問題によって小さいスケールでの結果が不正確になるからである。より根本的な原因は、間欠係数を流れ方向の速度から求めたことの不適切さにある。理想的には、明確な ON-OFF 信号が得られる渦プローブや広範囲の乱流圧力場の影響を受けないパッシブなスカラーを用いるべきである。外側のカットオフが l か l より大きいところで起こることと、1.3 の内側のカットオフの結果を組み合わせると、スケールの相似性は η から $3l$ までの範囲に及ぶと結論できる。このように、外側のカットオフは近似的に流れ方向の積分スケールであり、これは境界層厚さのオーダーである。

ここで、線切断の位置に対する次元の反応について調べてみる。図-6 の内側の図に境界層の間欠領域中のプローブの高さと D_3 の関係を示した。底面に近い $y < 0.5\delta$ では、境界面があまり現れないので次元を計算できない。実際は、 $y < 0.7\delta$ で計算が不確かになるため、結果を示さなかった。 D_3 の変動は、測定が信頼できる $0.75 < y/\delta < 1.0$ の範囲で約 10% である。なお、1.3 で二次元断面を求めたのもほぼこの領域であり、これは線切断から得られる値の平均を示すので、線切断はかなり有効な方法であると言える。この方法により、スケールの相似性がほぼ積分スケールまで広がることがわかった。流れの境界条件に強く依存するような大きな渦は、積分スケールより数倍大きいので、スケールの相似性は流れ

表-1 幾つかの古典的な乱流中の乱流 (非乱流境界面のフラクタル次元)

流	境界面のフラクタル次元	
	二次元切断	一次元切断
境界層	2.38	2.40*
軸対称噴流	2.33	2.32*
平面後流	—	2.37**
混合層	—	2.40**

注 * 外流までの範囲の代表的な平均

** 外側の領域中のある代表的な位置での単独の値

の最大スケールまでは及ばないと推定できる。境界面に関する結果を、表-1 に要約した。

表-1 から、境界面の次元は約 2.3~2.4 で、本質的に流れの種類に無関係であると考えられる。つまり、流れの幾何学的状態に強く依存するような最大スケールがスケールの相似性には含まれないので、流れの種類の違いをフラクタル次元の違いによって決定できないことである。

これまででは、ほぼ $0.6 < \gamma < 0.1^*$ の領域にある境界面を調べたが、この領域の外側では境界面がまれにしか現れないため、線切断から信頼できる統計量を得るには長い時間間隔でデータを取ることが必要である。これは、テラーの凍結場の仮説を破ることになり、また長い時間により、結果がランダムになるため、フラクタルの性質があいまい(曖昧)になる。この点については、2. で十分に検討する。

最後に、Maxworthy が Hele-Shaw の実験において、粘性流体中に平らにした空気気泡を注入したときの境界線を $D_2=1.37$ と求めたことは注目値する。

1.5 雲のフラクタル次元：簡単な比較研究

Lovejoy は、雲のフラクタル次元を面積と周辺長さの関係から求めた。古典的な物体の周辺長さ P と面積 A は、 $P \propto A^{1/2}$ の関係があり、次元 D_{2p} のフラクタル境界線をもつ物体では $P \propto A^{(1/2)D_{2p}}$ と修正される。この関係を用い、統計的に相似でサイズの異なる物体の面積と周辺長さと同じ縮小率で求めることにより、 D_{2p} を決定できる。Lovejoy は、1 km から 1 000 km までのさまざまなサイズの雲の写真から、約 1.34 というフラクタル次元を得た。この値は、われわれが実験室内の乱流で求めたものと一致する。われわれは、流れの切断を行って D_2 を求めたが、Lovejoy は雲が水平面へ投影されたときの境界線を観察している。ここで重要な問題は、二つの方法の違いであり、この点に関する密着な解析の存在は知らないが、投影は他と η のオーダーの距離で離れている数多くの断面の重ね合わせであると考えられる。

* 訳者注 誤記と思われる。

写真-2や写真-3から、断面の重ねせによる影響を定性的に認識できる。一つは、内部の断片性を減らすことで、これはフラクタル次元の減少に帰着する。もう一つは、境界線の粗さを増やすことで、これはフラクタル次元の増加に帰着する。もし、内部の断片性と境界線の入組み具合のいずれも小さく、フラクタル次元が小さければ D_2 と D_{2p} はあまり変わらない。雲の断面を得ることは困難であるが、境界層または噴流の重ねせ断面はスリット光の厚さを増加させることによって容易に得られる。スリット光の厚さを η と 2η の間から約 5η まで増加させたとき、次元 D_2 は 1.37 から 1.43 まで増加し、これより $D_{2p} > D_2$ と推測できる。この実験では、 Re 数を一定に保てなかったが、もし Re 数の増加により、次元は変わらずにスケールの相似性の範囲が増加したとすれば、この D_2 の増加はかなり確実となる。この推論を雲に当てはめれば、 $D_2 < 1.34$ と結論できる。Carter らが Lovejoy とは全く異なる方法を用いて、 $D_2 = 1.16$ と求めたことは注目に値する。

Lovejoy と Schertzer は、雲について、いき値を高く設定することによって 1.34 より小さい次元を得ている。フラクタルのより強烈な領域は、フラクタル次元のより小さい集合の上に分布しているという結果については 2. と 3.3 で記述するが、これは極めて一般的である。

2. 境界層中の等速度面の次元

ここでは、図-7の u_1 のように速度領域をある一定のレベルで分けたときの境界面のフラクタル次元を求める。等濃度面についても同じように扱える。1.4 と同様に線切断を用いて得たコントロール集合の次元を Box-Counting 法によって求めた。図-8は、境界層の高さ 0.35δ での結果である。それぞれの曲線は同じ信号の異なる部分に対する結果を、また曲線間の直線は平均を表し、変動は約 12% 以内である。これをいろいろな基準速度や境界層中の高さに対して求め、図-9にまとめた。次元は、局所的な平均速度の等値面で最大となり、

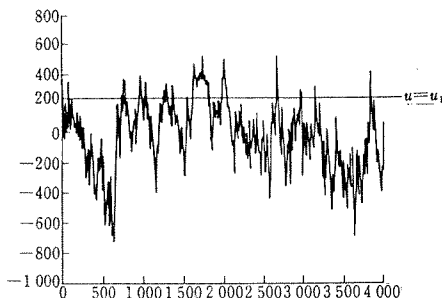


図-7 乱流の速度信号 $u(t)$ とレベル u_1 による等速度面の定義(単位: 任意)

その最大値は壁からの距離の増加につれて3に近づく(内側の図参照)。

これを幾つかの要素を考慮に入れて考えてみる。次元は、最も密に空間を埋める等速度面または“信号と基準との交点(Level Crossing)”が最大の値となる速度、言い換えると最大確率密度に対して最大になると予想される。境界層の十分に乱れた領域では、速度信号の確率密度のピークはほぼ平均速度において生じる。境界層の自由流内 ($y \gg \delta$) では、理想的には自由流の速度が至るところで支配的になるため、集合 $u_1 = U_\infty$ の次元が3となる。しかし、実際は自由流の速度にノイズが重なるために次元のピークは3より幾分減少し、付近の速度レベルへの広がりを生じる。間欠領域では乱流の所々に層流の信号が現れ、次元は乱流と非乱流域中の等速度面の次元の重み平均であり、ノイズの有無にかかわらず非乱流域の平均速度付近が最もコントロール集合の要素の分布が高密なため、この付近で次元が最大になると予想される。Kovaszny, Kibens と Blackwelder の測定によれば、非乱流域の平均速度は全体の平均速度とほぼ等しい。壁

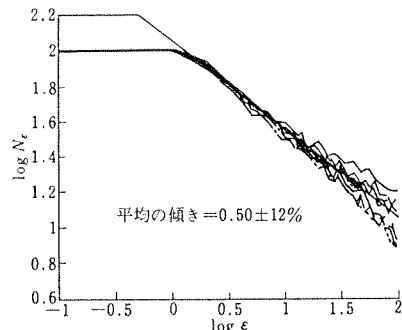


図-8 速度信号といき値レベル $u_1 (= 0.75 U_\infty)$ の交点によって得られるコントロール集合を覆うのに必要な線要素の長さ ϵ と数 N_ϵ の関係

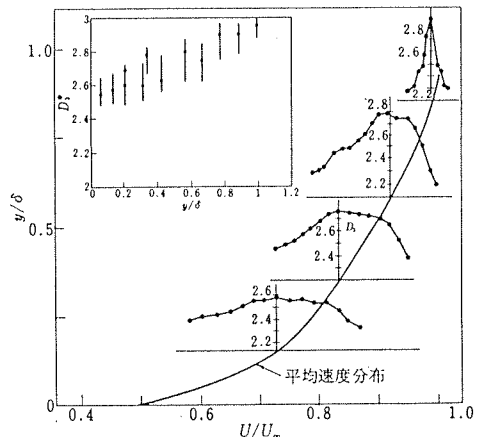


図-9 速度の壁からの距離の関数として表した流れ方向の速度の等値面の次元

付近では強力な粘性効果によって等速度面の極端なねじれが抑制されるために次元は最小になる。これらの説明は、図-9のデータと一致しているが、図-9のデータは非乱流域の等値面だけでは当てはまらないため、非乱流域に属する等速度面の次元に関連した問題には回答できない。

図-8,9では、横方向の速度信号のうち、積分時間スケールの約50倍の多くの部分を使い、それらをアンサンブル平均したが、これはすべての等値面が流れ方向では積分スケールの数倍しかなく、横方向ではより小さいことに基づいている。しかし、部分の長さを合計の長さは同じまで長くしていくと、直線の領域はますます不明確になり、やがて長さが積分スケールの500倍を超えると全く消える(図-10)。そのときの分布は、ランダムプロセスの特徴を示すような形になる(図-11)。これより、積分時間スケールの50倍のオーダーで見るときには等値面はフラクタル的であるが、より大きなオーダーで見るときにはランダムプロセスに似た挙動を示すということがわかる。

もし、フラクタルが完全な秩序と全体的な無秩序との中間にあると考えたならば、われわれは乱流の短時間または小さい範囲の秩序と長時間の無秩序を明らかにしたことになり、この概念は乱流中のさまざまな場面で成り

立っている。

3. 乱流の消散構造のフラクタル次元

乱流の消散構造は、間欠的であることが知られており、またスケールの相似性の議論は乱流を表現するうえで大変有用である。この議論の要旨は、つぎのとおりである。十分に発達した乱流場において、一辺の長さ L_0 の立方体を考える。ここで L_0 は乱流の積分スケールである。この立方体を一辺の長さ $L_1 = L_0 n^{-1/3}$ ($n \gg 1$) の小さい立方体に分割したとき、それぞれの立方体内部の消散率の密度分布はある確率法則に従う。さらに、これらの立方体を一辺の長さ $L_2 = L_1 n^{-1/3}$ の2番目のオーダーの立方体に再分割しても確率分布は変わらない。この相似性は、粘性に直接影響されるサイズまでのすべての運動スケールに拡張される。以下で扱うのは、箱に消散を含むか含まないかに従う最も簡単な2値分布である。この章の目標は、乱流エネルギー場とパッシブなスカラー場の消散構造に対してフラクタルによる表現が妥当かどうかを調べることである。3.1を除き、この章の残りの題材は新しいものである。

3.1 Mandelbrot の研究の更新

D を消散場のフラクタル次元とする。最小のスケール η および消散領域全体を覆うのに必要なサイズ η の箱の数 N が決まれば、 D は式(7)によって計算できる。

$$D = \log N / \log (L_0 / \eta)$$

または、

$$N = (L_0 / \eta)^D \quad \dots\dots (7)$$

それぞれの立方体の体積は $(L_0 / \eta)^3$ なので、消散立方体の占める総体積は $(L_0 / \eta)^{D-3}$ である。すべての消散は、それらの立方体に含まれるので、それらの消散水準は総体平均で $(L_0 / \eta)^{3-D}$ である。これは、局所等方性を仮定すると、消散立方体の $(du/dx)^2$ が総体平均で $(L_0 / \eta)^{3-D}$ であることを意味する。結果的に du/dx のせん(尖)度は、消散立方体が占める体積に $(L_0 / \eta)^{2(3-D)}$ を乗じた式(8)で与えられる。

$$K = \overline{(\partial u / \partial x)^4} / \overline{(\partial u / \partial x)^2}^2 \quad \dots\dots (8)$$

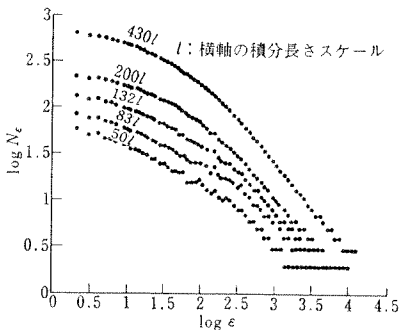


図-10 次元とデータ部分の長さの関係

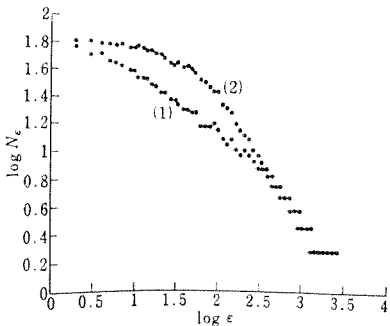


図-11 等速度点に Box-Counting 法を適用した代表的な曲線(1)と同じ量の点が直線上にランダムに分布しているときの曲線(2)

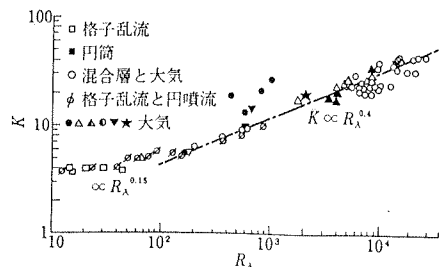


図-12 ミクروسケールの Re 数と du/dt のせん度の関係

* 訳者注 誤記と思われる。

ただし、これは消散を支える集合と $(du/dt)^2$ を支える集合が独立であると仮定している。式(4)から式(9)を得る。

$$K \propto (L_0/\eta)^{3-D} \propto R_\lambda^{3/2(3-D)} \quad \dots\dots (9)$$

ここに、

$$R_\lambda = u' \lambda / \nu$$

λ : テーラーミクروسケール

u' : 流れ方向の速度変動(Root-Mean-Square)

Antonia, Phan-Thien と Chambers は、テーラーの凍結場の仮説から、 (du/dx) のせん度と (du/dt) のせん度が約7%以内で同じであることを証明した。 $\log K$ と $\log R_\lambda$ のグラフは、余次元 $(3-D)$ を与える。ただし、 K は (du/dt) のせん度である。

Mandelbrot は、この理論と Kuo と Corrsin のせん度のデータの検定から、 D を 2.6 と算定した。図-12 は、Van Atta と Antonia がそれ以降の多くのデータについて編集したものに多少の修正と追加を行って転載したものである。これらのデータは、傾き 0.4 の直線に乗り、 D は 2.73 となるが、これは前の Mandelbrot の値 (= 2.6) を改訂した値である。これから、消散場の占める部分的な体積 $(L_0/\eta)^{(3-D)}$ は、 $(L_0/\eta)^{-0.27}$ で与えられることがわかる。図-13 の傾きは、 $R_\lambda < 150$ においては小さく (≈ 0.15)、 D は 2.9 となる。これは低い Re 数では、消散領域の間欠性がより小さいかまたは局所的な等方性が得られない可能性を示している。

3.2 温度“消散”場のフラクタル次元

温度導関数 (dT/dt) のせん度 $F\theta$ は、 Re 数とつぎの関係がある。

$$F\theta \propto R_\lambda^{3/2(3-D^*)}$$

ここに、

D^* : 温度消散場の次元

図-13 のデータから、 $D^* = 2.6$ と結論でき、この傾き 0.52 の直線を図-12 に描けば、スカラーと運動量消散場の違いが統計的に有意であることが容易にわかる。これより、温度消散場は空間をあまり満たさない [$\propto (L_0/\eta)^{-0.4}$]、すなわちより間欠的であると言え、他のパッシブなスカラー量もそう推測される。これは、海洋学者に

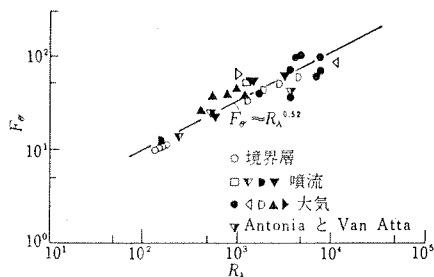


図-13 温度導関数 dT/dt のせん度

指摘されてきたことである。

同様に (dT/dt) のせん度、すなわち正規化された 6 次のモーメントの挙動は、 $R_\lambda^{3(3-D^*)}$ で表されるはずである。このことは、図-14 の $R_\lambda > 100$ での実験データとよく一致する。

3.3 線切断による等消散面の次元

ここでは、消散構造が占める体積もしくは等消散面の次元の、その領域を区分するいき値への依存性を線切断を用いて調べる。この場合は、消散領域の統計的な等方性が非均質せん断流れでさえ期待できるので、前に挙げた線切断によるあいまいさはない。方法は、 u を $(du/dt)^2$ で置き換えるのを除いて、1.4 と全く同じである。図-15 は、格子乱流においていき値を消散の総体平均値の 5 倍に設定したときの結果を、また内側の図はさまざまないき値に対して得られる曲線の傾きを示す。 D は、いき値に対してかなり強い依存性を示し、いき値を高くした場合の消散領域はあまり空間を満たさず、それを囲む面はあまり入り組んでいないと見せる。雲に関しても同様のデータが Lovejoy と Schertzer によって得られている。いき値を低くするにつれてばらつきが大きくなる理由は、自己相似なスケールの範囲が小さくなるため、次元の測定がより不確かになるからである。しかし、 D 軸の切片はほぼ 2.7 であると言え、これは 3.1 で

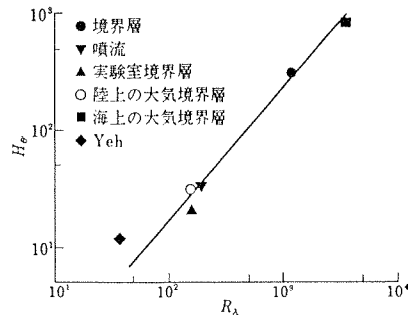


図-14 dT/dt の超へん平度

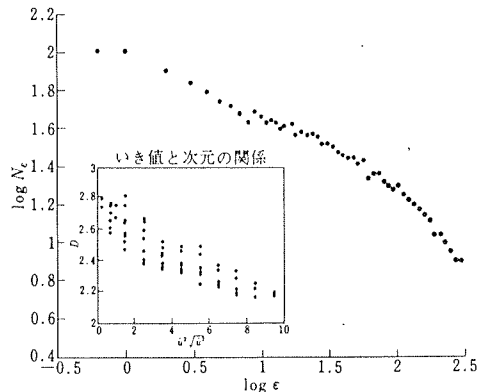


図-15 格子乱流中の“消散”場に線切断を行い、いき値を $5u_c^2$ としたときの $\log \epsilon$ と $\log N_\epsilon$ のグラフ

得た値とよく一致する。

フラクタル集合が体積の小部分を占める場合には、薄い(thin)フラクタルと呼ばれる。これは数学的には体積0の集合として定義されるが、実際には有限な内部スケールのカットオフにより、体積は正であるが小さい。消散集合は、 Re 数が十分に小さい場合、体積/面積の比がほとんど0に近いので薄いフラクタルである。同様に、乱流・非乱流境界面も薄いフラクタルである。

4. 他の諸問題

4.1 発達領域中の境界面のフラクタル次元

円筒回りの流れを例に考えると、 Re 数が大きい場合でも円筒のすぐ近くでは多かれ少なかれ規則的な渦が放出されるので、渦・非渦境界面は古典的な面であり、その次元は2になると予想される。前述のように、かなり下流での境界面の次元は約2.4なので、発達領域では次元が2から約2.4まで上昇すると推測できる。またこの領域で広範囲の測定は行っていないが、噴流での画像法や後流での線切断などの測定により、この推測を確信した。この場合、スケールの相似性の範囲は当然小さくなる。

4.2 格子乱流中の物質線(Material Line)の伸長

Corrsinが示したような、乱流場にインク滴を置いた場合にそれをねじ曲げる乱流運動の影響は、複雑なアルゴリズムに従う繰返し体系、すなわちそれぞれの繰返しによってより小さいスケールを作成するものと等価であると考えられる。もしそうなら、インクのはん(斑)点の周辺長さは指数的に増加するはずであるが、これを実験で証明するのは困難なので、格子の後方の乱流場での物質線の伸長という類似した問題を調べた。水路中に置いた格子の後方の発達領域中に細かい水素気泡の線を生成し、それが下流で広がったときの長さを、鏡を45°に置いて二つの直交する投影図を得ることによって測定した。水素気泡の長さを最初に測定したのはCorrsinとKarweitで、彼らは統計的に軸対称な線要素の軸に対して、あらゆる角度をなす面による切断の数と長さの関係式を用いて間接的に求めた。図-16において二つの測定

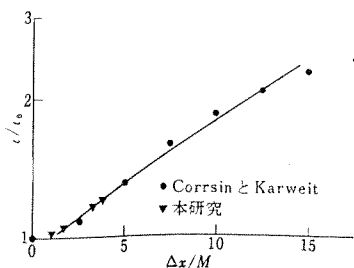


図-16 格子から下流への距離と物質線長さの平均の関係

が重なる部分で一致していることは注目に値する。明らかに最初と最後の段階を除いて増加は指数的である。初期の挙動が指数的であるとは予想できず、最終の横ばいは不適切な縮小率での長さの測定が原因と考えられる。

4.3 速度信号

図-17は、わずかに加熱した軸対称噴流の中心線上で得られた温度信号を示している。この信号の最も顕著な特徴は、鋭い三角波のような構造の上により小さい構造が重なっていることで、境界層の温度および速度(特に垂直成分)の信号もそれほど明確ではないが似通った挙動を示す。この徐々にあるレベルに高まり、それから急激に低下するという挙動は、自己相似の徴候である指数法則の挙動と一致する。LovejoyとMandelbrotによれば、もし幅 ω が逆比例累積分布 $Pr(\omega > W) \propto W^{-1}$ に従い、高さ $\pm \omega^{1/\alpha}$ (符号はランダム)のランダムに配置した長方形パルスの和を人工的に作れば、図-17と定性的に似通った信号を作ることができる。ここで、 α は特性指数である。

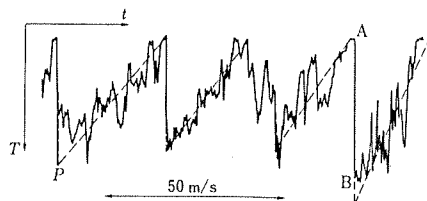
乱流の信号がフラクタルであるという予想は簡単な概念でない。なぜなら、この次元は信号をプロットするために選ぶスケールに強く依存するからであり、例えば信号をコルモゴロフスケールと同程度に広げれば、信号は滑らかになり、次元は1に近付く。こうして得られた信号は自己類似(Self-Affine)なフラクタルであると予想できる。この自己類似なフラクタルとは複雑なスケールの挙動[変換 $S(x_1, x_2, \dots, x_i) \rightarrow S(r_1 x_1, r_2 x_2, \dots, r_i x_i)$ に対して不変の、ただし r はすべて異なる]を示すものを意味しており、この方面に関してわれわれは現在研究中である。

4.4 より高次の次元

同じ次元をもつ二つの異なるフラクタルを少なくとも区別できるようにするために、より高次の次元が定義された。これは、式(10)で与えられる。

$$D_q = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{q-1} \times \frac{\log \sum P_i^q}{\log \epsilon} \right) \quad \dots (10)$$

ここで、 p_i は長さ ϵ の*i*番目の箱に集合の力が含まれる確率である。 q が大きい場合、 D_q はより“集中した”



注 間欠率は、0.93である。A、Bで示した鋭い飛躍が見られる。

図-17 軸対称な加熱噴流の乱流エネルギーの最大発生領域で得られた温度のオシログラム

領域の、また q が小さい場合はより“まばらな”領域の特徴が定量化される。さまざまな q に対して得られるこの次元は、Halsey らで議論されたような集合の特徴を示している。

4.5 太い(fat)フラクタルと乱流

ここでは、乱流と太いフラクタルとの関係を調べる。文献では太いフラクタルの厳密な意味に対して明白な一致はないが、基本的にその体積は有限である。太いフラクタルに Dox-Counting 法を適用すれば、それが埋められている空間の次元が得られ、その境界は薄いフラクタルである。太いフラクタルの例は、写真-2 で煙の濃度があるいき値を超えるようなすべての点の集合であり、この乱流・非乱流境界面の次元は 1.7 ですでに測定した。何種類かの乱流について測定した間欠率を積分して大まかな乱流域 ($U < 0.99U_0$) の占める体積の割合を得た。例えば、円形噴流(随伴流の有無にかかわらず)に対して約 0.5、円筒後方の平面後流に対して約 0.6、圧力一定な二次元境界層に対して約 0.75 である。最後の値が若干大きいのは、壁付近で間欠率が減少するのと一致している。

5. 結 言

乱流にはフラクタル的な挙動を示す幾つかの様相があることを示し、その幾つかのフラクタル次元を測定した。フラクタル次元は、フラクタル集合の一つの尺度でしかないが、一番重要なものであり、より高次の次元はフラクタルをより完全に特定するのに役立つであろう。しかし、現段階では制限や留保条件なしに、“乱流はフラクタルである”と規定するには研究が不足している。乱流を非常に長い時間スケールで見たならば、消散場を除いてそのフラクタル的な挙動を失うと思われる。このように乱流は、それぞれが少しずつ異なった多くのフラクタルの集合体である。この見解は現在の流行である、

乱流を半組織化された動きの総体とする見方とほぼ一致している。

このような研究が、乱流のもろもろの様相の各々にフラクタル次元を与えたとき、元の乱流をどのようにして再構成するかという“乱流問題”に対して有用かどうかは明らかではない。より広い背景の下でその端緒が開かれているとしても、乱流に関するこの種の問いがまじめになされているとは思えない。この問題に取り組まなければ、フラクタルがわれわれの乱流力学に対する理解をどれだけ進歩させるかはわからない。実は、正反対の議論がしばしば進んでいる。適例としては消散場の表現である。渦線や管または小滴による習慣的な表現は、次元が 2.7 の薄いフラクタルといった新しい表現よりも物理的により明確である。しかし、実際はこの見解があまり正しいとは言えない。というのは、測定値と完全に一致するような渦要素による表現はまだなされていないからである。いずれにしろフラクタルは乱流の幾何学を表現しているが、幾何学と力学は 1 対 1 の対応をしない。

フラクタル次元の測定の困難さを、 Re 数の小さい工学的流れを例に位相空間と物理空間で比べてみると、この場合でさえフラクタル次元をもつアトラクタを所有しているが、位相空間でのアトラクタの次元の決定は Re 数の増加につれて非常に困難かつ不確実になる。一方、物理空間でのフラクタル次元の決定は、 Re 数の増加につれてより確実になる。

最後に、Chorin によって始められた数値解析の研究は、渦要素の力学的展開の問題に関するものであり、これが将来フラクタルと乱流のつながりを確立するであろう。

(平成元. 1. 5 原稿受理)

本稿は、当学会が手続きを経て翻訳していますので、訳文の無断転載を禁じます。

— 空気調和・衛生工学のための —

SIの解説と演習

国際単位系(SI)について、従来の重力単位系・絶対単位系などとの相互関係まで詳しく解き、さらに豊富な例題によって単位系換算の演習まで加えたSIについてのユニークな実用書である。

第1章 SIの導入 第2章 SIの基本
第3章 SI単位の使い方 付録 単位系間の相関関係

体 裁 B5判 112ページ
定 価 1545円(本体1500円)
会員価 1391円(本体1350円)
送 料 260円
申込先 空気調和・衛生工学会事務局