Fernando Rodríguez V.

El problema que nos interesa es, en su forma general, el

te:

Sea F/k una extensión galoisiana de cuerpos de característica con $Gal(F/k) = G$, ¿qué grupos aparecen como grupos de Galois, $Gal(L/k)$, con $[L : F] = 2$?

Es fácil verificar que tales extensiones L están parame por el grupo $(\dot{F}/\dot{F}^2)^G$ y que existe un morfismo natural

$$(\dot{F}/\dot{F}^2)^G \xrightarrow{b} H^2(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$
$$\alpha \to \delta$$

En donde se tiene

$$L = F(\sqrt{\alpha})$$

Y δ representa la sucesión exacta

$$1 \to Gal(L/F) \xrightarrow{inc} Gal(L/k) \xrightarrow{Res} G \to 1 .$$

Se obtiene, entonces, que la siguiente sucesión es exacta.

$$\dot{k}/\dot{k}^2 \xrightarrow{i_1} (\dot{F}/\dot{F}^2)^G \xrightarrow{b} H^2(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{i_2} H^2(G, \dot{F})$$

(Los morfismos i_1 o i_2 inducidos naturalmente por las inclus

Nos interesa el caso particular en el que δ representa a cuaterniónico $\mathbb{H}$, se tiene el siguiente resultado debido a Witt

$$L = F(\sqrt{\alpha}) \quad , \quad Tr_{F/k}(\alpha) \neq 0$$

entonces L/k es galoisiana con $Gal(L/k) \simeq \mathbb{H}$ sí y solo si existe $\mathbb{R} \in F^{3\times3}$ rotación de la siguiente forma

$$R = diag(\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \sqrt{x_1 x_2})\ R' \qquad \text{con } R' \in k^{3\times3}$$

y

$$\alpha / Tr_{F/k}(\alpha) = \frac{1}{4}(1 + TR(R))$$

o lo que es lo mismo R' es una equivalencia sobre k de $\det = +1$ entre las formas $\langle x_1, x_2, x_1x_2\rangle \simeq \langle 1,1,1\rangle$.

Como ejemplo, damos uno, originalmente de Dedekind

$$\langle 2,3,6\rangle \underset{\mathbb{Q}}{\simeq} \langle 1,1,1\rangle$$

$$\mathbb{Q}' = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Gal(F(\sqrt{6 + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6}})/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{H}$$

$$F = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$$

Universidad de Buenos Aires
Buenos Aires - Argentina